Série A. N°
N° D'ORDRE :

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Jean GIRAUD

1re THESE. - COHOMOLOGIE NON ABELIENNE DE DEGRE 2.

2e THESE. - MULTIPLE COMPLEXE DES VARIETES ABELIENNES.

Soutenues le 21 décembre 1966 devant la Commission d'examen.

M. EILENBERG — *Président*

M. GROTHENDIECK, M. SAMUEL — *Examinateurs*

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Jean GIRAUD

1re THESE. - COHOMOLOGIE NON ABELIENNE DE DEGRE 2.

2e THESE. - MULTIPLE COMPLEXE DES VARIETES ABELIENNES.

Soutenues le 21 décembre 1966 devant la Commission d'examen.

M. EILENBERG	*Président*
M. GROTHENDIECK M. SAMUEL	*Examinateurs*

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers le Professeur A. GROTHENDIECK qui, par ses conseils précieux, ses encouragements constants et sa bienveillance amicale, m'a permis de mener à bien ce travail.

Je remercie vivement le Professeur S. EILENBERG qui a bien voulu présider le Jury et le Professeur P. SAMUEL qui a accepté de me donner un second sujet.

Introduction. Nous donnons ici un compte rendu d'un travail plus systématique et détaillé en cours d'achèvement, cité (Réf.) dans ce qui suit. Nous supposons seulement la donnée d'une catégorie munie d'une notion de localisation: une topologie au sens de Grothendieck. Outre le cas des faisceaux sur un espace topologique, nos résultats s'appliquent donc à la catégorie des faisceaux sur un schéma pour la topologie étale de Grothendieck ou à celle des G-ensembles, où G est un groupe [éventuellement profini] la localisation étant dans ce cas l'oubli des opérations de G.

Etant donnée une suite exacte de faisceaux de groupes $1 \to A \to B \to C \to 1$ sur un espace topologique X et un espace principal homogène P sur X de faisceau structural C (appelé désormais un C-torseur sur X), on cherche classiquement une "obstruction" dont la neutralité soit nécessaire et suffisante pour que l'on puisse relever P à B. Une réponse fut donnée par P. Dedecker (3) lorsque X est paracompact. Nous adopterons un tout autre point de vue. Comme l'a remarqué Grothendieck, l'obstruction est toute trouvée: considérons pour tout ouvert U de X la catégorie $R(U)$ des (Q,q) où Q est un B-torseur sur U et $q: Q \overset{B}{\wedge} C \xrightarrow{\sim} P|U$ un C-isomorphisme entre le C-torseur obtenu par extension du groupe structural et la restriction de P à U. On vérifie immédiatement que

(1) pour tout U, $R(U)$ est un groupoïde et si $W \subset V \subset U$ sont des ouverts de X, on a transitivité des foncteurs restriction $R(U) \to R(V)$, $x \rightsquigarrow x|U$;

(2) pour tout U, deux objets de $R(U)$ sont localement isomorphes;

(3) le préfaisceau de catégories $U \rightsquigarrow R(U)$ est un champ (I, 3.2), autrement dit on peut recoller les morphismes et les objets;

(4) il existe un recouvrement ouvert X_i de X tels que les $R(X_i)$ soient non vides.

Définition: On appelle gerbe sur X un préfaisceau de catégories $U \rightsquigarrow R(U)$ vérifiant les conditions (1) à (4); une gerbe R est triviale si $R(X)$ est non vide.

Cette définition se généralise immédiatement à un site quelconque et le lecteur trouvera aisément des exemples de gerbes. Le but de la cohomologie de degré 2 est clair: apprendre à calculer avec les gerbes. Soit R une gerbe sur X, pour tout $x \in Ob(R(U))$, U ouvert de X, le préfaisceau $\underline{Aut}(x)(V) = Aut(x|V)$ est un faisceau de groupes sur U d'après (3). Le principal théorème en degré 1 est que l'ensemble des classes à isomorphisme près d'objets de $R(U)$ est isomorphe à $H^1(U, \underline{Aut}(x))$ ou mieux, que la restriction de R à U est équivalente à la gerbe des $\underline{Aut}(x)$-torseurs sur U (et les ouverts de U). Si x et y sont deux objets isomorphes de $R(U)$, on a un isomorphisme $\underline{Aut}(x) \approx \underline{Aut}(y)$ qui est unique modulo composition avec un automorphisme intérieur. On considère donc, pour tout U, la

catégorie LI(U) dont les objets sont les faisceaux de groupes sur U, les morphismes $F \to G$ étant les sections du faisceau quotient $G\backslash\underline{\mathrm{Hom}}(F,G)/F$, où F et G opèrent par automorphismes intérieurs. Il est clair que ces nouveaux morphismes se recollent; par un procédé standard, on rajoute des objets aux LI(U) d'où une catégorie $\mathrm{LIEN}(U) \supset \mathrm{LI}(U)$ dans laquelle les morphismes et les objets se recollent. Un objet de LIEN(X) sera appelé un lien sur X. On a fait ce qu'il faut pour qu'une gerbe R sur X définisse, à isomorphisme unique près, un lien L sur X. On dit que L lie R ou que R est une L-gerbe. Voir (III, 2.5.4) pour le calcul du lien de la gerbe des relèvements d'un C-torseur par rapport à un morphisme $B \to C$ de faisceaux de groupes.

Définition. Soit L un lien sur X. On note $H^2(X,L)$ l'ensemble des classes "à L-équivalence près" de L-gerbes; on note $H^2(X,L)'$ le sous-ensemble des classes des gerbes triviales.

Par définition, un faisceau de groupes A sur X définit un lien, noté $\underline{\mathrm{lien}}(A)$. Si A est abélien, on construit une bijection entre $H^2(X, \underline{\mathrm{lien}}(A))$ et l'ensemble sous-jacent au groupe $H^2(X,A)$ défini en algèbre homologique (III, 3.3.3) et l'on explicite en termes de gerbes la structure de groupe et la fonctorialité en A et X de $H^2(X,A)$. On définit de manière naturelle le centre d'un lien L: c'est un faisceau de groupes abéliens. C. On prouve que $H^2(X,C)$ opère librement et transitivement sur $H^2(X,L)$, (III, 3.4). Ceci n'empêche pas $H^2(X,L)$ d'être vide; mais l'on attache canoniquement à L une

classe $r(L) \in H^3(X,G)$ dont la nullité est nécessaire et suffisante pour que $H^2(X,L)$ soit non vide. Ainsi, ce qui est proprement "non abélien" est l'étude de l'ensemble, éventuellement vide, des classes neutres (III, 3.2).

Ces résultats sont valables pour n'importe quel site. Si l'on travaille avec la catégorie $\underline{G}$ des G-ensembles, où G est un groupe, on constate qu'un lien L sur $\underline{G}$ est essentiellement un groupe A muni d'un morphisme de groupes $G \to Aut(A)/Int(A)$, c'est à dire un G-kernel au sens de Eilenberg et MacLane (4). De plus une L-gerbe s'interprète comme une extension de G par L. On retrouve donc une partie des résultats de (4) sur les extensions de groupes; mais nous ne prouvons pas que tout élément de $H^3(X,G)$ est de la forme $r(L)$.

Indépendemment, M. T. Springer a défini la 2-cohomologie galoisienne en termes d'extensions de groupes. Dans notre langage, il a prouvé que, sur un corps parfait, toute gerbe dont le lien est localement défini par un groupe algébrique linéaire "provient" d'une gerbe dont le lien est localement défini par un groupe fini nilpotent; localement signifie ici oubli des opérations du groupe de Galois, c'est à dire passage à une extension finie du corps de base. On en déduit aisément un résultat de Grothendieck: si k est de dimension ≤ 1 (i.e., si le groupe de Brauer de toute extension finie séparable de k est nul), alors k est de dimension ≤ 1 au sens de la cohomologie non abélienne: toute gerbe "algébrique" est triviale. Soit alors X un espace homogène sous un groupe algébrique linéaire connexe G sur k. L'obstruction à écrire X comme quotient

d'un espace homogène principal ("torseur") sous G est une gerbe algébrique, à savoir la gerbe des solutions locales du problème (IV, 3.7). Donc X est quotient d'un torseur Y, donc X admet un point rationnel, car il en est ainsi de Y d'après la "conjecture I" de Serre (CG) prouvée par Steinberg (17).

Citons deux exemples d'obstructions classiques à valeurs dans un H^2 abélien qui se présentent naturellement sous forme de gerbe. Soient X un préschéma et $x \in Br(X)$ un élément du groupe de Brauer de X (19). Nous allons expliciter l'image de x par le morphisme de groupes (toujours injectif)

$$(*) \qquad d: Br(X) \to H^2(X, G_m) ,$$

de (19), où le H^2 est pris au sens de la cohomologie étale. Supposons que x soit donné par une Algèbre d'Azumaya A sur X. Par définition de d comme un cobord, on trouve que $d(x)$ est la classe de la gerbe des "banalisations" de A, dont les objets sont les Modules localements libres L sur X munis d'un isomorphisme d'Algèbre $\underline{End}(L) \simeq A$. Si on représente x par un fibré de Severi-Brauer P, on trouve de même que $d(x)$ est la classe de la gerbe des Modules localement libres L munis d'un isomorphisme de X-préschémas $Proj(L) \simeq P$. Ce qui précède reste valable si on remplace X par un espace topologique muni du faisceau d'anneaux des fonctions continues à valeurs complexes. Dans ce cas, on explique dans (Réf.) comment décrire $d(x)$ à partir de P sans utiliser de cohomologie non abélienne.

Soient maintenant S un préschéma et S' un sous-préschéma fermé défini par un Idéal de carré nul J. On cherche à relever à S un S'-préschéma X'. Pour tout ouvert U' de X', soit

$R(U')$ la catégorie des S-préschémas lisses U sur S munis d'un S'-isomorphisme $U' \xrightarrow{\sim} U \times_S S'$. D'après l'exposé III de (13) on définit ainsi une gerbe $U' \rightsquigarrow R(U')$ sur X' pour la topologie de Zariski. De plus R est abélienne et son invariant est donc un faisceau de groupes abéliens A; d'après loc. cit., on a $A = T \otimes_{O_{S'}} J$, où T est le dual du faisceau $\Omega^1_{X'/S'}$ des différentielles relatives de X' sur S'. On a donc une obstruction $c \in H^2(X', A)$ à relever X' et, si $c = 0$, l'ensemble des classes à isomorphisme près de relèvements de X' est isomorphe à $H^1(X', A)$. Conservons S, S' et J et considérons un S-préschéma en groupes lisse G et un G'-torseur P' sur S' pour la topologie étale, où $G' = G \times_S S'$. L'obstruction à relever P' sera cette fois une gerbe sur S (et non sur P'), pour la topologie étale; à savoir la gerbe qui à tout objet $T \to S$ du site étale de S associe la catégorie $R(T)$ des G-torseurs P sur T munis d'un G'-isomorphisme entre la restriction de P à $T' = T \times_S S'$ et celle de P'. On obtient bien une gerbe: la condition (3) de supra est vérifiée par un raisonnement standard et on a (1) parce que tout G-morphisme de G-torseurs est un isomorphisme. On a (4) car le torseur trivial se relève (!) et P est localement trivial pour la topologie étale de S' qui est la même que celle de S (1 exp. VIII). Enfin, on a (2). En effet, deux G-torseurs sont localement isomorphes et, en localisant, on voit qu'il suffit de prouver que toute section de G' (= automorphisme du torseur trivial) se relève localement en une section de G, ce qui même est vrai localement pour la topologie de Zariski, car G est supposé lisse. Poursuivant le

même raisonnement, on voit comme plus haut que la gerbe est abélienne et liée par $\underline{g} \otimes_{O_S} J$, où $\underline{g}$ est l'algèbre de Lie de G.

Évoquons rapidement un résultat de Grothendieck, lié au théorème de spécialisation du groupe fondamental. Soient X un préschéma propre sur un anneau local Hensélien et soit X_o la fibre spéciale (qui est un sous-préschéma fermé de X). Soit G une gerbe sur X dont les faisceaux d'automorphismes sont constructibles (1) et soit G_o sa restriction à X_o. Le foncteur

$$(*) \qquad \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(G/X) \to \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(G_o/X_o)$$

est une équivalence de catégories. Dire que ce foncteur est pleinement fidèle implique la bijectivité des applications $H^i(X,A) \to H^i(X_o,A_o)$, $i = 0,1$, pour tout faisceau constructible A sur X (gerbe des A-torseurs). Dire que (*) est essentiellement surjectif équivaut essentiellement à l'assertion suivant: pour tout lien constructible L sur X, l'application naturelle (cf. IV, 3.5.5)

$$H^2(X,L) \to H^2(X_o,L_o)$$

est "monomorphique" autrement dit l'image inverse de l'ensemble des classes neutres de $H^2(X_o,L_o)$ est l'ensemble des classes neutres de $H^2(X,L)$. L'assertion concernant (*) sera prouvée dans (Réf.) en utilisant l'essentiel des résultats de ce travail.

SOMMAIRE

	Page
CHAPITRE I. Champs sur un site.	
§1. Univers, U-sites	1
§2. Catégories fibrées	10
§3. Champs sur un site	14
§4. Champ associé à une E-catégorie fibrée	19
§5. Image directe et inverse d'un champ par un morphisme de sites	22
§6. Les champs CART(F,G)	26
CHAPITRE II. Torseurs.	
§1. Objets à opérateurs dans un topos	27
§2. Torseurs	30
§3. Torseurs sur un site; cohomologie	33
§4. Objets tordus	43
§5. La suite exacte en degré 1	49
CHAPITRE III. Liens et gerbes.	
§1. Liens sur un site	59
§2. Gerbes	69
§3. Cohomologie de degré 2	
1. L'ensemble $H^2(L)$ attaché à un lien L	85
2. Description de l'ensemble $H^2(L)'$ des classes neutres	89
3. Cohomologie abélienne de degré 2	92
4. Comparaison de la cohomologie d'un lien et de celle de son centre	96
5. Liens réalisables	98
6. Compléments sur la suite exacte	101
7. Sections d'un espace homogène	105
CHAPITRE IV. Changement de site.	
§1. Image inverse de torseurs	107
§2. Image inverse de liens et de gerbes	108
§3. Suite exacte attachée à un morphisme de sites	111

Chapitre I. Champs sur un site.

§1. Univers, U-sites.

Nous renvoyons à (SGAA, I-VI) dont nous rappelons les conventions.

1.1. Soit $\underline{U}$ un univers fixé dans tout ce travail (SGAA, VI, §7.1). Une $\underline{U}$-catégorie est une catégorie telle que, pour tout couple (x,y) d'objets, l'ensemble $\mathrm{Hom}(x,y)$ soit isomorphe à un élément de $\underline{U}$. Si E est une $\underline{U}$-catégorie, on appelle catégorie des U-préfaisceaux d'ensembles sur E la catégorie

(1.1.1) $\quad \hat{E}_{\underline{U}} = \underline{\mathrm{Hom}}(E^{o}, U\text{-ens}) , \quad$ (aussi notée $\hat{E}$),

des foncteurs contravariants de E à valeur dans la catégorie des ensembles appartenant à $\underline{U}$. On a un foncteur pleinement fidèle

(1.1.2) $\quad \eta : E \to \hat{E}, \quad \eta(S)(T) = \mathrm{Hom}(T,S) .$

[Plus correctement, $\eta(S)(T)$ est un élément de $\underline{U}$ isomorphe à $\mathrm{Hom}(T,S)$ choisi grâce au symbole τ (SGAA, VI, §7.2.2)].

1.2. Un $\underline{U}$-site est une U-catégorie munie d'une topologie telle qu'il existe une famille de générateurs topologiques indexée par un élément de $\underline{U}$ (SGAA, VI, 7.3.1). Si E est un $\underline{U}$-site, on note $\tilde{E}$ la sous-catégorie pleine de $\hat{E}$ dont les objets sont les faisceaux. On a des foncteurs

(1.2.1) $\quad \tilde{E} \xrightarrow{i} \hat{E}, \quad \tilde{E} \xleftarrow{a} \hat{E}, \quad E \xrightarrow{\varepsilon} \tilde{E}, \quad$ où $\quad \varepsilon = a\eta ,$

où i est l'inclusion et où a est le foncteur faisceau associé; il est défini comme l'adjoint à gauche de i et il commute aux limites projectives finies; on le choisira de telle sorte que

(1.2.2) $\quad a \cdot i = id_{\widetilde{E}}$.

1.3. Si la topologie canonique de E est plus fine que celle du site, c'est à dire si tout préfaisceau représentable est un faisceau, on a

(1.3.1) $\quad i \cdot c = \eta$

et le foncteur c est pleinement fidèle. Si, de plus, les produits fibrés finis existent dans E, on dira que E est un site standard.

1.3.2. Un U-topos est une U-catégorie qui, munie de sa topologie canonique, devient un U-site tel que tout U-faisceau soit représentable. Tout ce que l'on dira des U-sites s'applique donc ipso facto aux U-topos. La catégorie $\widetilde{E}$ des U-faisceaux sur un U-site E est un U-topos, et "réciproquement" (SGAA, II, §2.4.14).

Définition 1.4. Soient X et Y deux U-sites. Un morphisme de sites $f: X \to Y$, de source X et de but Y est un foncteur $f^{-1}: Y \to X$ entre les catégories sous-jacentes [appelé foncteur sous-jacent] tel que pour tout U-faisceau F sur X le composé $F \cdot f^{-1}$ soit un faisceau sur Y et tel que le foncteur adjoint à gauche [appelé foncteur image inverse par f]

(1.4.1) $\quad f^*: \widetilde{Y} \to \widetilde{X}$

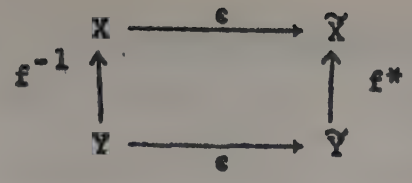
du foncteur image directe

(1.4.2) $\quad f_*: \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$, $\quad f_*(F) = F \cdot f^{-1}$,

commute aux limites projectives finies.

1.4.3. On choisira toujours f de telle sorte que le carré

(1.4.4)



soit commutatif (SGAA,III, §3.2.4). Si X et Y sont des sites standards, les foncteurs c sont pleinement fidèles et l'on se permettra d'écrire indifféremment

(1.4.5) $f^*(S)$ ou $f^{-1}(S)$, $S \in Ob(Y)$.

Proposition 1.5. Soient X et Y des sites standards et $f^*: Y \to X$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) f^* est sous-jacent à un morphisme de sites $f: X \to Y$;

(ii) f^* commute aux limites projectives finies et transforme familles couvrantes en familles couvrantes..

Si, de plus, X et Y sont des U-topos, (i) équivaut à chacune des conditions suivantes.

(iii) f^* commute aux limites projectives finies et aux limites inductives quelconques;

(iv) f^* commute aux limites projectives finies et admet un adjoint à droite f_*.

1.5.1. (SGAA,III, §3.5.5). Sous les conditions de (iii), on dira que f^* est un morphisme de topos (de source X et de but Y).

1.6. Topologie induite sur $\hat{E}$. Soient E un U-site et V un univers tel que E et U appartiennent à V. Les catégories $\hat{E}_U$ et $\tilde{E}_U$ appartiennent à V. On appelle topologie induite sur $\hat{E}$ la plus fine de celles pour lesquelles le foncteur $a: \hat{E} \to \tilde{E}$ est continu (SGAA,III, §3.4.1).

1.6.1. Si l'on munit $\hat{E}$ de la topologie induite et $\tilde{E}$ de la topologie canonique, les foncteurs

(1.6.2) $\quad E \xrightarrow{\eta} \hat{E}\ ,\quad \tilde{E} \xrightarrow{i} \hat{E}\ ,\quad \hat{E} \xrightarrow{a} \tilde{E}\ ,\quad E \xrightarrow{\epsilon} \tilde{E}$

définissent des morphismes de V-sites

(1.6.3) $\quad E \longleftarrow \hat{E}\ ,\quad \tilde{E} \longleftarrow \hat{E}\ ,\quad \hat{E} \longleftarrow \tilde{E}\ ,\quad E \longleftarrow \tilde{E}\ .$

D'après (Réf. 0, 3.6) les foncteurs image directe correspondants sont des équivalences de catégories et induisent des équivalences entre les catégories de U-faisceaux.

§2. Catégories fibrées.

Pour plus de détails, nous renvoyons à (SGA, VI et D, 1).

2.1. Soit $\varphi\colon F \to E$ un foncteur. Pour tout $S \in Ob(E)$, on appelle catégorie fibre de F en S et on note

(2.1.1) $\quad F_S$

la sous-catégorie de F dont les flèches, appelées S-morphismes, sont les $m \in Fl(E)$ vérifiant $\varphi(m) = id_S$. On note

(2.1.2) $\quad Hom_S(x,y)\ ,\quad x,y \in Ob(F_S)\ ,$

l'ensemble des S-morphismes $x \to y$. Soient $m\colon x \to y$ une flèche de F et $f\colon T \to S$ sa projection (image par φ). On dira que m est E-cartésienne, ou que m est une image inverse de y par f, ou, abusivement, que x est une image inverse de y par f, si, pour tout $z \in Ob(F_T)$, l'application

(2.1.3) $\quad Hom_T(z,x) \xrightarrow{\sim} Hom_f(z,y)\ ,\quad n \to mn\ ,$

est bijective, où $Hom_f(z,y) = \{n \in Hom(z,y),\ \varphi(n) = f\}$.

Définition 2.2. Une E-catégorie fibrée est un foncteur $\varphi: F \to E$ tel que, pour toute flèche $f: T \to S$ de E et tout $y \in Ob(F_S)$, il existe une image inverse de y par f et tel que le composé de deux morphisme E-cartésiens de F soit E-cartésien (existence et transitivité des images inverses).

2.2.1. On rappelle que, d'après (D, 5.6), toute E-catégorie fibrée est E-équivalente (2.3.7) à une E-catégorie scindée, c'est à dire obtenue par le procédé de (SGA, VI, 9 ou D, 5) à partir d'un foncteur $E^o \to (Cat)$, $S \rightsquigarrow F_S$.

2.3. Soit U un univers auquel E appartient. Les E-catégories fibrées appartenant à U sont les objets d'une catégorie

(2.3.1) $\underline{Fib}(E)$

dans laquelle l'ensemble des flèches de source $\varphi: F \to E$ et de but $\gamma: G \to E$ est l'ensemble

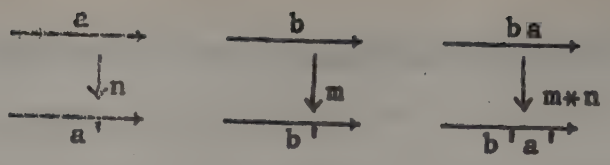
(2.3.2) $Cart_E(F,G)$

des E-foncteurs cartésiens de F dans G, c'est à dire l'ensemble des foncteurs $u: F \to G$ tels que $\gamma u = \varphi$ et qui transforment tout morphisme E-cartésien de F en un morphisme E-cartésien de G. De plus, $Cart_E(F,G)$ est l'ensemble d'objets d'une catégorie

(2.3.3) $\underline{Cart}_E(F,G)$

dont les flèches sont les morphismes de foncteurs (appelés E-morphismes de E-foncteurs) $m: u \to v$, $u,v \in Cart_E(F,G)$, tels que $\gamma * m$ soit le morphisme identique du foncteur φ. Grâce au produit de composition de deux morphismes de foncteurs (SGA, VI, §1) ou (TF), noté

(2.3.4)



$$m*n = (m*a')(b*n) = (b'*n)(m*a) ,$$

on définit une 2-catégorie [SH, chap. VI, §1]

(2.3.5) $\underline{\underline{\mathrm{Fib}}}(E)$

dont les catégories de morphismes sont les $\underline{\mathrm{Cart}}_E(F,G)$. Enfin, pour toute E-catégorie fibrée F, on pose

(2.3.6) $\underline{\mathrm{Lim}}(F/E) = \underline{\mathrm{Cart}}_E(E,F)$;

un objet de $\underline{\mathrm{Lim}}(F/E)$ est appelé une section cartésienne de F au dessus de E.

Proposition 2.3.7. Soient F et G deux E-catégories fibrées. Pour qu'un E-foncteur cartésien $u: F \to G$ soit conservatif, fidèle, pleinement fidèle ou une équivalence, il faut et il suffit que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, il en soit ainsi du foncteur $u_S: F_S \to G_S$ induit par u sur les fibres en S.

2.3.7.1. (Réf. I, I.5.1) On dit qu'un foncteur $f: X \to Y$ est conservatif si toute flèche m de X dont l'image f(m) est inversible est elle-même inversible. Un E-foncteur cartésien $u: F \to G$ qui est une équivalence sera appelé une E-équivalence: il existe alors une E-équivalence $v: G \to F$ et des E-isomorphismes $m: vu \xrightarrow{\sim} id_F$, $n: uv \xrightarrow{\sim} id_G$ vérifiant

(2.3.7.2) $$u*m = n*u \quad \text{et} \quad m*v = v*n .$$

On dira que le couple (m,v), (qui détermine n), est un E-quasi-inverse de u.

2.4. Préfaisceau des S-morphismes. Soit F une E-catégorie fibrée. A tout $S \in Ob(E)$ et à tout couple (x,y) d'objets de F_S on associe un préfaisceau d'ensembles

(2.4.1) $\underline{Hom}_S(x,y)$ (Réf. I, 2.6)

sur la catégorie $E_{/S}$ des objets de E au dessus de S et une bijection

(2.4.2) $Hom_S(x,y) \xrightarrow{\sim} H^0(E_{/S}; \underline{Hom}_S(x,y))$.

Tout d'abord, si F est scindée, on pose

(2.4.3) $\underline{Hom}_S(x,y)(f) = Hom_T(x^f, y^f)$, $f: T \to S$, $f \in Ob(E_{/S})$,

où (x^f, y^f) est l'image inverse de (x,y) par f et on définit la bijection en notant que id_S est objet final de $E_{/S}$. On traite le cas général en plongeant F dans une catégorie scindée E-équivalente (Réf. I, 2.6.3). On a des accouplements de composition

(2.4.4) $\underline{Hom}_S(x,y) \times \underline{Hom}_S(y,z) \to \underline{Hom}_S(x,z)$, $x,y,z \in Ob(F_S)$,

et, pour tout E-foncteur cartésien $u: F \to G$, des morphismes

(2.4.5) $\underline{Hom}_S(x,y) \to \underline{Hom}_S(u(x), u(y))$, $x,y \in Ob(F_S)$,

qui jouissent de propriétés formelles évidentes. Enfin, pour tout $S \in Ob(E)$ et tout $x \in Ob(F_S)$, on note

(2.4.6) $\underline{Aut}_S(x)$ (resp. $Aut_S(x)$)

le préfaisceau de groupes (resp. le groupe) des S-automorphismes de x, défini de manière evidente.

§3. Champs sur un site.

3.0. On rappelle (SGAA, I, §1.4.2 et AS) qu'une topologie sur une catégorie E s'interprète comme une fonction qui, à tout $S \in Ob(E)$, associe une partie $J(S)$ de l'ensemble des cribles de $E_{/S}$ et qui vérifie certaines conditions. Les éléments de $J(S)$ sont appelés les raffinements de S. Un crible C d'une catégorie D est une sous-catégorie pleine de D telle que toute flèche de D dont le but appartient à C appartient à C.

Définition 3.1. Soit E un site. On dit qu'une E-catégorie fibrée F est complète (resp. précomplète) si, pour tout $S \in Ob(E)$ et tout raffinement R de S, le foncteur restriction

$$\underline{Cart}_E(E_{/S}, F) \to \underline{Cart}_E(R, F) \tag{3.1.1}$$

est une équivalence de catégories (resp. est pleinement fidèle).

On notera que cette définition ne fait pas intervenir d'univers.

Définition 3.2. Soit E un site.

(i) On appelle E-champ (resp. E-préchamp) une E-catégorie fibrée complète (resp. précomplète).

(ii) On appelle morphisme de E-champs un E-foncteur cartésien dont la source et le but sont des E-champs.

(iii) On appelle morphisme de morphismes de E-champs un E-morphisme de E-foncteurs dont la source et le but sont des morphismes de E-champs.

3.2.1. Soient $\underline{U}$ et $\underline{V}$ des univers tels que $\underline{U} \in \underline{V}$. Si E est un $\underline{U}$-site appartenant à $\underline{V}$, on notera

(3.2.2) $\underline{\mathrm{Champ}}(E)$ (resp. $\underline{\underline{\mathrm{Champ}}}(E)$)

la catégorie (resp. 2-catégorie) dont les objets sont les E-champs appartenant à V, les catégories de morphismes dans $\underline{\mathrm{Champ}}(E)$ étant les $\underline{\mathrm{Cart}}_E(F,G)$, (2.3.3), les morphismes dans $\underline{\mathrm{Champ}}(E)$ étant les morphismes de champs.

Proposition 3.3. Soient E un site et F une E-catégorie fibrée.

(i) Pour que F soit précomplète il faut et il suffit que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout couple (x,y) d'objets de F_S, le préfaisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_S(x,y)$ soit un faisceau (sur E/S pour la topologie induite (SGAA, III, §3.6.2)).

(ii) Si la topologie de E est définie par une prétopologie $\sqcap$ (SGAA, I, §2.1.3), pour que F soit complète (resp. précomplète) il faut et il suffit que toute famille couvrante de $\sqcap$ soit de F-descente effective universelle (resp. de F-descente universelle), (D,6.21).

3.3.1. La première assertion résulte de (D, 7.1). Prouvons (ii). La condition est nécessaire car l'ensemble des raffinements est stable par changement de base. Elle est suffisante car les cribles de F-descente effective universelle sont les raffinements d'une topologie (D, 6.23).

3.3.2. Les conditions de (ii) s'interprètent en termes d'objets munis d'une donnée de descente (D, 9.19): en langage imagé " un préchamp est une E-catégorie fibrée dans laquelle les morphismes se recollent; un champ est un préchamp dans lequel les objets se recollent (tout donnée de descente y est effective)" .

Exemple 3.4. Soit E un U-site. En associant à tout $S \in Ob(E)$ la catégorie $(E_{/S})^{\sim}$ des faisceaux d'ensembles sur la catégorie $E_{/S}$ munie de la topologie induite (SGAA, III, §3.6.2), on définit une E-catégorie scindée

(3.4.1) FAISC(E)

le foncteur image inverse associé à une flèche $f: T \to S$ de E étant défini par la composition avec le foncteur $E_{/T} \to E_{/S}$. On vérifie que FAISC(E) est un E-champ (Réf. II, 3.4.4) et on l'appelle le champ des faisceaux d'ensembles sur E.

3.4.2. Si E est un U-site standard (1.3), la E-catégorie Fl(E) dont les objets de projection $S \in Ob(E)$ sont les flèches de E de but S est un E-préchamp en vertu de (3.3(i)). On a alors un E-foncteur cartésien pleinement fidèle

(3.4.3) $\quad Fl(E) \to FAISC(E), \quad (X/S) \rightsquigarrow Hom_S(*,X).$

Proposition 3.4.4. Si E est un U-topos, le foncteur (3.4.3) est une E-équivalence et Fl(E) est un E-champ.

3.4.4.1. En effet, les foncteurs induits par (3.4.3) sur les fibres sont des équivalences car les $E_{/S}$ sont des U-topos (SGAA, III, §3.4.11). On notera que Fl(E) est un E-champ de topos; on entend par là que les fibres sont des topos et les foncteurs image inverse des morphismes de topos (1.5.1).

3.4.5. Soit E un U-site. On résume les propriétés des équivalences

(3.4.6) $\quad \widetilde{E}_{/e(S)} \xrightarrow{\approx} (E_{/S})^{\sim}, \ (F/e(S)) \rightsquigarrow Hom_{e(S)}(e(*),F), \ S \in Ob(E),$

de (SGAA, III, §3.6.6) en disant que l'on a une E-équivalence de champs

$$(3.4.7) \qquad \underline{Fl}(\widetilde{E})\times_{\widetilde{E}}E \xrightarrow{\sim} FAISC(E)$$

qui induit (3.4.6) sur les fibres. Grâce à cette équivalence, si E est un site standard, le foncteur (3.4.3) s'interprète "plus géométriquement" comme

$$(3.4.8) \qquad Fl(E) \to Fl(\widetilde{E})\times_{\widetilde{E}}E, \quad (X/S) \rightsquigarrow (\epsilon(X)/\epsilon(S)).$$

3.5. Pour toute catégorie C, on désigne par $\underline{Gr}(C)$ la catégorie dont les objets sont les <u>groupes</u> de C, c'est à dire les couples (G,m) où $G \in Ob(C)$ et où m est une application qui, à tout $S \in Ob(E)$, associe une loi de groupe m(S) sur l'ensemble $G(S) = Hom(S,G)$, tel que, pour tout $f: T \to S$, $f \in Fl(C)$, l'application $G(f): G(S) \to G(T)$, $G(f)(s) = sf$, soit un morphisme de groupes. Nous adoptons la définition analogue pour les notions d'objet à opérateurs de C et, plus généralement, pour les "objets de C munis d'une structure algébrique d'espèce Σ ".

<u>Proposition 3.5.1</u>. Soit F une E-catégorie fibrée telle que les <u>limites projectives finies</u> existent dans les fibres de F et soient respectées par les foncteurs images inverses. Il existe alors une E-catégorie fibrée $\underline{Gr}(F/E)$ et un <u>isomorphisme</u> entre foncteurs définis sur $(Cat_{/E})^{o}$ à valeurs dans (Cat)

$$(3.5.2) \qquad \underline{Gr}(\underline{Cart}_E(X,F)) \xrightarrow{\sim} \underline{Cart}_E(X,\underline{Gr}(F/E))$$

où $X \to E$ est une E-catégorie, c'est à dire un objet de $(Cat_{/E})$. De plus, on a un E-foncteur cartésien <u>fidèle</u> et <u>conservatif</u> (2.3.7) "oubli de la structure de groupe":

(3.5.3) $\quad f: \underline{Gr}(F/E) \to F.$

Enfin, si F est complète (resp. précomplète) pour une topologie sur E, il en est de même de $\underline{Gr}(F/E)$.

3.5.4. On notera que (3.5.2) caractérise $\underline{Gr}(F/E)$ à isomorphisme unique près en prenant pour X la catégorie finale définie par un $S \in Ob(E)$, on doit avoir canoniquement

(3.5.5) $\quad \underline{Gr}(F/E)_S \xrightarrow{\sim} \underline{Gr}(F_S),$

et f induit sur les fibres en $S \in Ob(E)$ le foncteur "objet sous-jacent", $(G,m) \rightsquigarrow G$.

3.5.6. Si l'on prend pour E un topos $\underline{T}$ et pour F le $\underline{T}$-champ $\underline{Fl}(\underline{T})$ (3.4.4) la fibre de $\underline{Gr}(\underline{Fl}(\underline{T})/\underline{T})$ en l'objet final e de $\underline{T}$ est donc la catégorie des groupes de $\underline{T}$. L'image inverse d'un groupe G de $\underline{T}$ par un morphisme $S \to e$ étant l'objet $G \times S$ de $\underline{T}/S$, muni de la structure de groupe (on dira S-groupe) évidente. Si E est un $\underline{U}$-site, il résulte de (3.4.7) que l'un a une E-équivalence de champs

(3.5.7) $\quad \underline{Gr}(\underline{Fl}(\tilde{E})/\tilde{E}) \times_{\tilde{E}} E \xrightarrow{\approx} FAGR(E)$

dont le but est la catégorie scindée obtenue en associant à tout $S \in Ob(E)$ la catégorie des faisceaux de groupes sur E/S, isomorphe à la catégorie des groupes de $(E/S)^{\sim}$. On dira que FAGR(E) est le champ des faisceaux de groupes sur E.

Exemple 3.5.7. Soit $\underline{T}$ un topos. Par une généralisation immédiate de (3.5.1), on construit un $\underline{T}$-champ

(3.5.8) $\quad OPER(\underline{T})$

dont la fibre en $S \in Ob(\underline{T})$ est la catégorie des objets à groupe d'opérateurs à droite du topos $\underline{T}_{/S}$. Si G est un groupe de $\underline{T}$, on définit de même le $\underline{T}$-champ

(3.5.9) $\qquad OPER(\underline{T},G)$

des G-objets à droite de $\underline{T}$ dont la fibre en $S \in Ob(E)$ est la catégorie des objets à groupe d'opérateurs à droite de $\underline{T}_{/S}$ dont le S-groupe sous-jacent est $G \times S$. On pose

(3.5.10) $\qquad \underline{Opér}(\underline{T},G) = OPER(\underline{T},G)_e$, $\quad \underline{Opér}(\underline{T}) = OPER(\underline{T})_e$,

où e est l'objet final de $\underline{T}$.

Proposition 3.6. $OPER(\underline{T},G)$ est un champ de topos. Le foncteur "oubli des opérations de G"

(3.6.1) $\qquad OPER(\underline{T},G) \to \underline{Fl}(\underline{T})$

est un morphisme de champs de topos. Il est conservatif (2.3.7.1).

La première assertion a été expliquée (3.4.4.1). La seconde signifie que les foncteurs induits par (3.6.1) sur les fibres sont des morphismes de topos (1.5 (iii)), ce qui indique comment calculer les limites inductives et les limites projectives finies dans les fibres de $OPER(T,G)$. La preuve est laissée au lecteur qui utilisera (SGAA, II, §2.4.8, II, §2.4.14).

§4. Champ associé à une E-catégorie fibrée.

Proposition 4.1. Soient E un $\underline{U}$-site et F une E-catégorie fibrée. Il existe un E-champ F' et un E-foncteur cartésien $f: F \to F'$ tels que, pour tout E-champ X, le foncteur

(4.1.1) $\underline{\mathrm{Cart}}_E(F',X) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Cart}}_E(F,X)$

induit par la composition avec f soit une équivalence.

4.1.2. Un tel couple (f,F') s'appelle un champ associé à F. Il est unique à E-équivalence près. Si, de plus, u: F → G est un E-foncteur cartésien et si g: G → G' est un champ associé à G, on appelle morphisme de champs associé à u un couple (u',i), où u': F' → G' est un morphisme de champs et ou i:u'f $\xrightarrow{\sim}$ gu est un E-isomorphisme de E-foncteurs. Le couple (u',i) est unique à isomorphisme unique près.

4.1.3. On prouve d'abord qu'il existe un E-préchamp F_o et un E-foncteur cartésien f_o: F → F_o tels que, pour tout E-préchamp X, le foncteur $\underline{\mathrm{Cart}}_E(F_o,X) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Cart}}_E(F,X)$ soit un isomorphisme. Il est clair que F_o est unique à isomorphisme unique près. On le construit en posant $\mathrm{Ob}(F_o) = \mathrm{Ob}(F)$ et en remplaçant $\mathrm{Hom}_S(x,y)$ par l'ensemble des sections du faisceau associé à $\underline{\mathrm{Hom}}_S(x,y)$.

4.1.4. Il reste à prouver la proposition lorsque F est un E-préchamp. On pose alors

(4.1.5) $\underline{A}(F)(S) = \varinjlim_{R \in J(S)} \underline{\mathrm{Cart}}_E(R,F)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, $R \in J(S)$, (3.0),

les morphismes de transition du système inductif étant les foncteurs de restriction

(4.1.6) $\underline{\mathrm{Cart}}_E(R,F) \to \underline{\mathrm{Cart}}_E(R',F)$, $R \supset R'$.

On définit ainsi une E-catégorie scindée $\underline{A}(F)$. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, $E_{/S}$ est un raffinement de S et l'on a donc un morphisme structural

$$\underline{\mathrm{Cart}}_E(E_{/S},F) \to \underline{A}(F)(S) ,$$

d'où un morphisme de catégories scindées $\underline{a}(F)$: $\underline{SF} \to \underline{A}(F)$, où $\underline{SF}$ est la catégorie de (D, 5.6). Choisissant un E-quasi-inverse du foncteur $\underline{v}F$: $\underline{SF} \xrightarrow{\sim} F$ de (D, 5.6), on trouve donc un E-foncteur cartésien

(4.1.7) φ: $F \to \underline{A}(F)$.

Corollaire 4.2. Soit F un E-préchamp.

(i) le couple $(\varphi, A(F))$ est un champ associé à F.

(ii) Soit f: $F \to F'$ un E-foncteur cartésien. Pour que (f,F') soit un champ associé à F il faut et il suffit que F' soit un champ et que f soit pleinement fidèle et couvrant.

4.2.1. (Réf. II, 2.1.3). On dit qu'un E-foncteur cartésien f: $F \to F'$ est couvrant si, pour tout $S \in Ob(E)$ et toute flèche m: $a \to b$ de F'_S, l'ensemble des s: $T \to S$ tels que l'image inverse de m par s appartienne à l'image essentielle de $\underline{Fl}(f)$: $\underline{Fl}(F_T) \to \underline{Fl}(F'_T))$ est un raffinement de S. Pour tout E-préchamp P, le foncteur

(4.2.1.1) $\underline{Cart}_E(F',P) \to \underline{Cart}_E(F,P)$, $x \rightsquigarrow xf$,

est alors fidèle.

4.2.2. Pour toute E-catégorie fibrée F, on obtient ainsi un champ associé à F, à savoir $\underline{A}(F_o)$ (4.1.3). On construit aisément un morphisme de 2-catégories (Réf. II, 2.2.4)

(4.2.3) a: $\underline{\underline{Fib}}(E) \to \underline{\underline{Champ}}(E)$, $F \rightsquigarrow \underline{A}(F_o)$,

tel que, pour tout E-foncteur cartésien m, $a(m)$ soit un morphisme de champs associé à m (4.1.2).

Corollaire 4.3. Le foncteur sous-jacent à (4.2.3) commute aux limites projectives finies.

4.3.1 (Réf. II, 2.2.7). On notera que les limites projectives existent dans $\underline{Fib}(\mathbb{E})$ et dans $\underline{Champ}(\mathbb{E})$ et se calculent fibres par fibres (Réf. II, 1.2.4).

§5. Images directe et inverse d'un champ par un morphisme de sites.

Proposition 5.1. Soit $f: \underline{X} \to \underline{Y}$ un morphisme de sites. Pour tout $\underline{X}$-champ F, le produit fibré

$$f_*(F) = F \times_{\underline{X}} \underline{Y}, \tag{5.1.1}$$

défini grâce au foncteur $f^{-1}: \underline{Y} \to \underline{X}$ sous-jacent à f est un $\underline{Y}$-champ.

5.1.2 (Réf. II. 3.1.1). On dira que $f_*(F)$ est l'image directe de F par f. On notera que, pour tout $Y \in Ob(\underline{Y})$, on a un isomorphisme canonique entre les catégories fibres

$$f_*(F)_Y \xrightarrow{\sim} F_X, \qquad x = f^{-1}(Y). \tag{5.1.3}$$

De plus, le foncteur naturel

$$\underline{Lim}(F/\underline{X}) \xrightarrow{\approx} \underline{Lim}(f_*(F)/\underline{Y}) \tag{5.1.4}$$

est une équivalence (Réf. II, 3.1.5.5).

Proposition 5.2. Soit $f: \underline{X} \to \underline{Y}$ un morphisme de sites. Pour tout $\underline{Y}$-champ G il existe un $\underline{X}$-champ $f^*(G)$ et un morphisme de $\underline{Y}$-champs $s: G \to f_*(f^*(G))$ tels que, pour tout $\underline{X}$-champ F, le composé ci-dessous soit une équivalence

$$\underline{Cart}_{\underline{X}}(f^*(G),F) \xrightarrow{\beta} \underline{Cart}_{\underline{Y}}(f_*(f^*(G)),f_*(F)) \xrightarrow{\sigma} \underline{Cart}_{\underline{Y}}(G,f_*(F)) \tag{5.2.1}$$

où β est le foncteur induit par le changement de base $f^{-1}: \underline{Y} \to \underline{X}$ sous-jacent à f et où σ est induit par la composition avec s.

5.2.2 (Réf. II, 3.2.5). On notera que le couple $(f^*(G),s)$ est unique à $\underline{X}$-équivalence unique près; on dit que c'est une image inverse de G par f. La notion d'image inverse de morphisme de champs est copiée sur (4.1.2).

Corollaire 5.2.3. Pour tout $\underline{Y}$-champ G, on a un foncteur

(5.2.3.1) $\quad \underline{Lim}(G/\underline{Y}) \to \underline{Lim}(f^*(G)/\underline{X})$.

(Réf. II, 3.2.1.5(7)). Par fonctorialité de l'image inverse, on définit (5.2.3.1) en notant que le $\underline{X}$-champ $\underline{X}$ est l'image inverse du $\underline{Y}$-champ $\underline{Y}$ car (5.1.4) est une équivalence.

Corollaire 5.3. L'image inverse de champs respecte les limites projectives finies. Si un morphisme de $\underline{Y}$-champs est fidèle, pleinement fidèle ou une équivalence il en est de même de son image inverse.

On trouvera une preuve dans (Réf. II, 3.2.9) où figure également une construction fonctorielle de l'image inverse qui donne un sens précis à la première assertion.

5.4. Extension à $\hat{E}$ d'une E-catégorie fibrée. Soient E une $\underline{U}$-catégorie et F une E-catégorie fibrée. Pour tout $P \in Ob(\hat{E})$, on pose

(5.4.1) $\quad F^+(P) = \underline{Cart}_E(E_{/P}, F)$, où $E_{/P} = \hat{E}_{/P} \times_{\hat{E}} E$.

On définit ainsi une E-catégorie scindée F, appelée extension canonique de F à $\hat{E}$. Pour tout $S \in Ob(E)$, on a un isomorphisme

$E_{/\eta(S)} \xrightarrow{\sim} E_{/S}$, d'où un isomorphisme

(5.4.2) $\quad F^+(\eta(S)) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Cart}}_E(E_{/S}, F)$.

On en déduit que $F^+ \times_{\hat{E}} E$ est E-isomorphe à la catégorie $\underline{S}F$ de (D, 5.6). Notant que id_S est objet final de $E_{/S}$, on obtient une E-équivalence

(5.4.3) $\quad F^+ \times_{\hat{E}} E \to F$, $\quad (X/S) \rightsquigarrow X(\mathrm{id}_S)$,

ce qui justifie la terminologie.

Proposition 5.5. Soient E un U-site et F une E-catégorie fibrée. F^+ est un faisceau de catégories sur $\hat{E}$ pour la topologie canonique, et aussi un $\hat{E}$-champ. Pour que F soit un E-champ, il faut et il suffit que, pour tout $m \in \mathrm{Fl}(\hat{E})$ tel que $a(m)$ soit un isomorphisme de $\hat{E}$ [m est bicouvrant (SGAA, II, §2.3.10)], le foncteur $F^+(m)$ soit une équivalence.

(Réf. II, 1.3.1)

5.6. Extension à $\tilde{E}$. Pour tout E-champ F, posons

(5.6.1) $\quad F^* = F^+ \times_{\hat{E}} \tilde{E}$, $\quad (i: \tilde{E} \to \hat{E})$;

on a donc

(5.6.2) $\quad F^*_S = \underline{\mathrm{Cart}}_E(E_{/S}, F)$, $S \in \mathrm{Ob}(\tilde{E})$, $E_{/S} = \tilde{E}_{/S} \times_{\tilde{E}} E$.

On a une E-équivalence

(5.6.3) $\quad \varphi: F \xrightarrow{\approx} F^* \times_{\tilde{E}} E$, $\quad (\varepsilon: E \to \tilde{E})$.

Si E est un site standard, cela résulte de l'égalité $i\varepsilon = \eta$ et de (5.4.3); sinon on utilise (D, 1.17) et (5.5).

Proposition 5.7. Soit E un U-site.

(i) Pour tout E-champ F le couple (φ, F^*) est une image inverse de F par le morphisme de sites $\tilde{E} \to E$ dont le foncteur

sous-jacent est $e: E \to \widetilde{E}$ (1.6.3).

(ii) Pour tout couple (F,G) de E-champs, le foncteur

(5.7.1) $\underline{Cart}_E(F,G) \xrightarrow{\approx} \underline{Cart}_E(F^*,G^*)$

est une équivalence de catégories.

(iii) Pour tout couple (F',G') de $\widetilde{E}$-champ, le foncteur induit par le changement de base $e: E \to \widetilde{E}$

(5.7.2) $\underline{Cart}_E(F',G') \longrightarrow \underline{Cart}_E(F'\times_{\widetilde{E}}E,\ G'\times_{\widetilde{E}}E)$

est une équivalence de catégories.

(iv) Pour tout $\widetilde{E}$-champ F', si on pose $F = F'\times_{\widetilde{E}}E$, on a une $\widetilde{E}$-équivalence $F^* \approx F'$. De plus, pour que les fibres de F' soient des $\underline{U}$-catégories (resp. équivalentes à des catégories appartenant à $\underline{U}$) il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de celles de F.

(v) Pour tout E-champ F, on a des équivalences

(5.7.3) $\underline{Lim}(F/E) \xrightarrow{\approx} \underline{Lim}(F^*/\widetilde{E}) \xrightarrow{\approx} F^*_e$

où e est un objet final de $\widetilde{E}$.

5.7.4 (Réf. II, 3.3.3 et 3.3.1). Notons que la proposition ci-dessus explique comment, par image directe et inverse, <u>la donnée d'un champ sur</u> E <u>équivaut à celle d'un champ sur le topos associé</u> $\widetilde{E}$. Par exemple, en vertu de (3.4.7 et 3.4.4), l'extension à $\widetilde{E}$ du champ des faisceaux d'ensembles sur E est $\widetilde{E}$-équivalente au champ des faisceaux d'ensembles sur $\widetilde{E}$ ou encore à $\underline{Fl}(\widetilde{E})$. Exercice de style: faisceaux de groupes, d'objets à opérateurs.

§6. Les champs CART(F,G).

6.1. Soient E une catégorie, F et G deux E-catégories fibrées. Pour tout $S \in Ob(E)$, on pose

(6.1.1) $\quad CART(F,G)(S) = \underline{Cart}_{E/S}(F_{/S}, G_{/S})$,

où $F_{/S} = F \times_E E_{/S}$ et $G_{/S} = G \times_E E_{/S}$. Utilisant la propriété universelle du produit fibré, on construit ainsi une E-catégorie scindée

(6.1.2) $\quad CART(F,G)$

et un E-foncteur cartésien

(6.1.3) $\quad F \times_E CART(F,G) \to G$, $(f,m) \rightsquigarrow m(f)$.

Lemme 6.2. Pour tout $P \in Ob(\hat{E})$, on a une équivalence

(6.2.1) $\quad \underline{Cart}_{E_{/P}}(F_{/P}, G_{/P}) \xrightarrow{\approx} CART(F,G)^+(P)$,

où $CART(F,G)^+$ désigne l'extension de CART(F,G) à $\hat{E}$ et où $F_{/P}$ et $G_{/P}$ sont déduites de F et G par le changement de base $E_{/P} \to E$, avec $E_{/P} = \hat{E}_{/P} \times_{\hat{E}} E$.

(Réf. I, 3.3.5). Prenant pour P l'objet final e de $\hat{E}$, on en déduit que le foncteur naturel

(6.2.2) $\quad \underline{Cart}_E(F,G) \xrightarrow{\approx} \varprojlim(CART(F,G)/E)$

est une équivalence, ce qui est clair si e est représentable.

Proposition 6.3. Soient E un U_--site, F et G deux E-catégories fibrées. Si G est un champ (resp. préchamp) il en est de même de CART(F,G).

(Réf. II, 2.1.5)

Chapitre II. Torseurs.

Il est bien connu que l'on peut définir la cohomologie de degré 1 en termes d'espaces principaux homogènes (appelés ici torseurs), (cf. [5][14]). Suivant une suggestion de Grothendieck [11], nous adoptons systématiquement ce point de vue qui conduit à des énoncés plus précis et plus naturels; cf. le paragraphe sur la "torsion".

§1. Objets à opérateurs dans un topos.

1.1. La notion d'objet à groupe d'opérateurs à droite (resp. gauche) d'une catégorie C est claire[9] (I,3.5). Nous convenons que, désormais, "objet à opérateurs" signifie objet à groupe d'opérateurs à droite. Si G est un groupe de C, nous appelons G-objet de C un objet à opérateurs de C dont le groupe sous-jacent est G. Si P est un G-objet, nous désignerons par

(1.1.1) $\overset{\vee}{P}$

le G-objet à gauche obtenu en faisant opérer G sur P par la formule $gx = xg^{-1}$.

Définition 1.2. Soient G un groupe d'un topos T, P et Q deux G-objets. On désignera par $\underline{\mathrm{Hom}}_G(P,Q)$ (resp. $\mathrm{Hom}_G(P,Q)$) le faisceau (resp. l'ensemble) des morphismes de P dans Q compatibles avec les opérations de G, (I.3.5.9)

Puisque T est un topos, $\underline{\mathrm{Hom}}_G(P,Q)$ est représentable par un objet de T auquel nous l'identifierons.

1.3.1. En particulier, nous noterons $\underline{\mathrm{Aut}}_G(P)$ le groupe

[9] Il est entendu que le groupe d'opérateurs est un groupe de C.

(de $\underline{T}$) des G-automorphismes d'un G-objet P. Il opère à gauche sur P de façon évidente, ce qui permet de le caractériser par la propriété universelle suivante: pour tout groupe A de $\underline{T}$, il existe un bijection entre l'ensemble des morphismes de groupes $A \to \underline{Aut}_G(P)$ et l'ensemble des structures de A-objets à gauche sur P telles que les opérations de A commutent à celles de G (on dit que A opère par G-automorphismes).

Définition 1.3.2. Soient A et B deux groupes d'un topos $\underline{T}$. Un A-B-objet de $\underline{T}$ est un B-objet (à droite) sur lequel A opère à gauche par B-automorphismes.

Proposition 1.3.3. Soient $\underline{T}$ un topos, G un groupe de $\underline{T}$, P un G-objet et G_d le G-objet obtenu en faisant opérer G sur lui-même par translations à droite. On a un isomorphisme de $\underline{Aut}_G(P)$-G-objets

$$\underline{Hom}_G(G_d,P) \xrightarrow{\sim} P\ ,\quad m \rightsquigarrow m(e), \tag{1.3.4}$$

où e désigne la section unité de G.

On fait opérer $\underline{Aut}_G(P)$ et $\underline{Aut}_G(G_d)$ sur $\underline{Hom}_G(G_d,P)$ par composition des morphismes et l'on identifie $\underline{Aut}_G(G_d)$ à G grâce aux translations à gauche; la preuve est immédiate. On en déduit une bijection

$$\underline{Hom}_G(G_d,P) \xrightarrow{\approx} P(e) = Hom(e,P). \tag{1.3.5}$$

où e est l'objet final de $\underline{T}$.

Définition 1.4 (Produit contracté). Soient G un groupe d'un topos $\underline{T}$ et P (resp. Q) un G-objet à droite (resp. gauche) de $\underline{T}$. On désigne par $P \overset{G}{\times} Q$ la quotient de $P \times Q$ par le groupe G opérant "diagonalement"

(1.4.1) $\quad P\times Q\times G \to P\times Q\ ,\quad (p,q,g)\mapsto (pg,g^{-1}q).$

1.4.2. Comme toutes les limites inductives, le produit contracté $P \overset{G}{\wedge} Q$ existe et est stable par changement de base, il répresente le foncteur

(1.4.2.1) $\quad \underline{T} \to (\mathrm{Ens})\ ,\quad X \mapsto \mathrm{Hom}(P\times Q,X)^G$

où $\mathrm{Hom}(P\times Q,X)^G = \{f \in \mathrm{Hom}(P\times Q,X)$, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, $p \in P(S)$, $q \in Q(S)$, $g \in G(S)$, on a $f(pg,g^{-1}q) = f(p,q)\}$

1.4.3. Si un groupe H de $\underline{T}$ opère sur Q par G-automorphismes il opère de même sur $P\times Q$, donc sur $P \overset{G}{\wedge} Q$, ce qui donne un sens à l'isomorphisme d'associativité

(1.4.4) $\quad (P \overset{G}{\wedge} Q) \overset{H}{\wedge} R \xrightarrow{\sim} P \overset{G}{\wedge} (Q \overset{H}{\wedge} R)\ ,$

valable sous des hypothèses évidentes. On a également un isomorphisme de symétrie

(1.4.5) $\quad (P \overset{G}{\wedge} Q)^\vee \xrightarrow{\sim} \overset{\vee}{Q} \overset{G}{\wedge} \overset{\vee}{P}\ .$

1.5. Extension du groupe structural. Soit $u: F \to G$ un morphisme de groupes de $\underline{T}$. Pour tout F-objet P on note

(1.5.1) $\quad u_P = P \overset{F}{\wedge} G$

le produit contracté obtenu en faisant opérer F sur G grâce à u et aux translations à gauche; c'est un G-objet grâce aux translations à droite de G.

Proposition 1.5.2. Pour tout G-objet Q, le morphisme induit par la composition avec $P \overset{F}{\wedge} u = Pu: P \to {}^uP$

(1.5.3) $\quad \underline{\mathrm{Hom}}_G({}^uP,Q) \to \underline{\mathrm{Hom}}_F(P,Q)\ ,\quad m \mapsto m.Pu\ ,$

est un isomorphisme.

On considère Q comme un F-objet grâce à u: F → G. On résume la compatibilité de cette construction avec le changement de base (localisation) en disant que l'on a un morphisme de T-champs

(1.5.4) $$OPER(T,u): OPER(T,F) \to OPER(T,G),\ P \longmapsto P \overset{F}{\wedge} G,$$

(Réf. III, 1.3.7)

§2. Torseurs.

Définition 2.1. Soient G un groupe d'un topos T et P un G-objet à droite de T. On dit que G opère librement sur P si, pour tout $S \in Ob(E)$, le groupe G(S) opère librement sur l'ensemble P(S). On dit que P est un espace homogène sous G si le quotient P/G est un objet final de T. On dit que P est un G-torseur à droite si, de plus, G opère librement sur P.

2.1.1. On définit de même un torseur à droite de T comme un couple (P,G) où G est un groupe de T et P un G-torseur à droite, Notion évidente de torseur à gauche. Désormais, si l'on ne précise pas, torseur signifiera toujours torseur à droite.

Proposition 2.2. Soient G un groupe de T et P un G-objet. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) P est un G-torseur;

(ii) -a- le morphisme

(2.2.1) $$P \times G \to P \times P\ ,\ (p,g) \longmapsto (pg,p)$$

est un isomorphisme,

-b- le morphisme final $P \to e$ est un épimorphisme

(iii) P est localement G-isomorphe au torseur trivial G_d (1.3.3) (dans le $\underline{T}$-champ $OPER(\underline{T},G)$).

(Réf. III, 1.4.3)

Corollaire 2.3. Deux G-torseurs sont localement isomorphes. Tout G-morphisme de G-torseurs est un G-isomorphisme. Pour qu'un G-torseur soit trivial [isomorphe à G_d] il faut et il suffit qu'il admette une section [i.e., que $P(e)$ soit non vide]. Pour qu'un G-objet soit un G-torseur il faut et il suffit qu'il en soit ainsi localement.

2.3.1. Ces assertions résultent aisément de (1.3.3). On notera que la condition -a- signifie que, pour tout $S \in Ob(\underline{T})$, l'ensemble $P(S)$ est vide ou bien un espace principal homogène sous le groupe $G(S)$. La condition -b- signifie qu'il existe une famille couvrante $(S_i \to e)$ telle que, pour tout i, l'ensemble $P(S_i)$ soit non vide.

2.3.2. La condition (2.2(iii)) montre que les G-torseurs forment un sous-champ

(2.3.3) $\quad TORS(\underline{T},G)$

de $OPER(\underline{T},G)$ (3.5.9). On note

2.3.4) $\quad \underline{Tors}(\underline{T},G)$

la catégorie des G-torseurs de $\underline{T}$ (fibre de $TORS(\underline{T},G)$ en e).

2.3.5. Si (P,G) est un torseur de $\underline{T}$, on pose

(2.3.6) $\quad \underline{ad}(P) = \underline{Aut}_G(P)$

et on l'appelle groupe adjoint de P. Il opère à gauche sur P (1.3.1); P est un $\underline{ad}(P)$-torseur à gauche car il en est ainsi localement. De plus, si (Q,H) est un torseur et (u: G → H, m: P → Q) un morphisme de torseurs, il existe un unique morphisme de groupes de $\underline{T}$, appelé morphisme adjoint

(2.3.7) $\underline{ad}(m)$: $\underline{ad}(P) \to \underline{ad}(Q)$

tel que m soit un $\underline{ad}(m)$-morphisme (Réf. III, 1.4.7 (iii)).

Définition 2.4. Un bitorseur d'un topos $\underline{T}$ est un triple (A,P,B) où A et B sont des groupes de $\underline{T}$ et P un A-B-objet tel que P soit un B-torseur à droite et un A-torseur à gauche.

2.4.1. Les conditions signifient également que P est un B-torseur à droite et que le morphisme $A \to \underline{ad}(P)$ (1.3.1) est un isomorphisme. Si on note

(2.4.2) BITORS($\underline{T}$) (resp. TORS($\underline{T}$))

le champ des bitorseurs (resp. torseurs) de $\underline{T}$, on résume (2.3.5) par (2.5).

Exemple 2.4.3. Soient F un $\underline{T}$-champ, x et y deux objets localement isomorphes de F_S, $S \in Ob(\underline{T})$. Grâce à la composition des morphismes $\underline{Isom}_S(x,y)$ est un $\underline{Aut}_S(y)$-$\underline{Aut}_S(x)$-bitorseur de $\underline{T}/S$, ce qui explique l'intérêt que nous portons aux bitorseurs.

Proposition 2.5. Soit $\underline{T}$ un topos. Le foncteur

(2.5.1) BITORS($\underline{T}$) → TORS($\underline{T}$), $(A,P,B) \rightsquigarrow (P,B)$,

est une équivalence de $\underline{T}$-champs. On obtient un quasi-inverse en associant à tout torseur (P,B) le bitorseur ($\underline{ad}(P)$,P,B).

2.5.2. (Réf. III, 1.5.4). Soit $\underline{P} = (A,P,B)$ un bitorseur. Nous désignerons par $\underline{P}^o = (B,P,A)$ le bitorseur obtenu en faisant opérer B à gauche et A à droite par le procédé de (1.1.1). Soient $\underline{P} = (P,G)$ un torseur et $\underline{P} = (\underline{ad}(P),P,G)$ le bitorseur correspondant. Nous désignerons par

(2.5.3) $\qquad \underline{P}^o = (P,\underline{ad}(P))$

le torseur à droite sous-jacent à $\underline{P}^o$ et nous l'appellerons l'*opposé* de P. Il est clair que $\underline{P} \rightsquigarrow \underline{P}^o$ est une auto-équivalence de TORS($\underline{T}$). Si G est *abélien*, on a un isomorphisme de groupes de $\underline{T}$

(2.5.4) $\qquad U: G \xrightarrow{\sim} \underline{ad}(P)\ ,\quad U(g)(p) = pg\ ,$

grâce auquel on identifie le $\underline{ad}(P)$-torseur $\underline{P}^o$ au G-torseur $\overset{\vee}{\underline{P}}$ de (1.1.1).

§3. Torseurs sur un site; cohomologie.

Définition 3.1. Soient E un U-site et A un faisceau de groupes sur E. On pose

(3.1.1) $\qquad \mathrm{TORS}(E,G) = \mathrm{TORS}(\tilde{E},G)\times_{\tilde{E}} E\ ,\quad (\epsilon: E \to \tilde{E})\ ,$

et on l'appelle le champ des G-torseurs sur E.

3.1.1.1. La fibre de TORS(E,G) en $S \in \mathrm{Ob}(E)$ est donc la catégorie des $(G\times\epsilon(S))$-torseurs de $\tilde{E}_{/\epsilon(S)}$. En vertu de l'équivalence $(E_{/S})^{\sim} \approx \tilde{E}_{/\epsilon(S)}$, elle est équivalente à la catégorie des G_S-torseurs sur le site $E_{/S}$, où G_S désigne la restriction de G à $E_{/S}$. Le foncteur image inverse associé à une flèche $f: T \to S$ de E s'interprète comme le foncteur induit par la

composition avec $E_{/T} \to E_{/S}$, (3.4.7), ce qui permet de décrire $TORS(\tilde{E},G)$ comme un E-champ scindé, (à E-équivalence près).

3.1.2. En vertu de (I, 5.7 (v)), on a une équivalence

(3.1.3) $\quad \underline{Lim}(TORS(E,G)/E) \approx \underline{Tors}(\tilde{E},G)$,

dont le but est la catégorie des G-torseurs de $\tilde{E}$ (2.3.4). Un objet de $\underline{Tors}(\tilde{E},G)$ sera appelé un G-torseur sur E. Un objet de $TORS(\tilde{E},G)_S, S \in Ob(E)$ sera appelé un G-torseur sur S. Conformément à nos conventions, il s'agit donc de torseurs à droite.

3.1.4. Si E est un U-topos, le changement de base $\varepsilon: E \to \tilde{E}$ est une équivalence; la notation (3.1.1) est donc en accord avec (2.3.4), à E-équivalence près.

Définition 3.2. Soit E un U-site. Pour tout U-faisceau d'ensembles A, on pose

(3.2.1) $\quad H^0(E,A) = Hom(e,A)$ $\quad$ (aussi noté $H^0(A)$)

où e est le faisceau final. L'application associée à une flèche $u: A \to B$ de E sera notée

(3.2.2) $\quad H^0(E,u): H^0(E,A) \to H^0(E,B)$ ou $u^{(0)}: H^0(A) \to H^0(B)$.

3.2.3. On obtient ainsi un foncteur $\tilde{E} \to$ U-ens qui respecte les limites projectives et, par suite, transforme groupes en groupes etc...

Définition 3.3. Soit A un faisceau de groupes sur un site E. On désignera par

(3.3.1) $H^1(E,A)$ (ou encore $H^1(A)$)

l'ensemble des classes à A-isomorphisme près de A-torseurs sur E, pointé par la classe du A-torseur trivial A_d, appelée classe unité.

3.3.2. On rappelle qu'un ensemble pointé est un couple $(X,x), x \in X$. On notera que $H^1(A)$ ne dépend pas de l'univers $\underline{U}$. En effet, si P est un A-torseur à valeurs dans un univers $\underline{V} \supset \underline{U}$, il est isomorphe à un $\underline{U}$-faisceau car, pour tout $S \in Ob(E)$, P(S) est vide ou isomorphe à G(S).

3.4. Fonctorialité. Si $u: A \to B$ est un morphisme de faisceaux de groupes sur E, le foncteur extension du groupe structural (1.5.4) transforme torseurs en torseurs. Il induit donc un morphisme de $\tilde{E}$-champs

(3.4.1) $\mathrm{TORS}(\tilde{E},u): \mathrm{TORS}(\tilde{E},A) \to \mathrm{TORS}(\tilde{E},B), P \rightsquigarrow P \overset{A}{\wedge} B.$

D'où, par passage aux classes à isomorphisme près d'objets dans les fibres en l'objet final e de $\tilde{E}$, un morphisme d'ensembles pointés $H^1(E,u)$, aussi noté

(3.4.2) $u^{(1)}: H^1(A) \to H^1(B).$

Si $v: B \to C$ est composable avec u, on a un isomorphisme canonique de morphismes de E-champs

(3.4.3) $\mathrm{TORS}(E,v) \circ \mathrm{TORS}(E,u) \xrightarrow{\sim} \mathrm{TORS}(E,vu)$.

En particulier, $A \rightsquigarrow H^1(A)$ est un foncteur de la catégorie des faisceaux de groupes sur E dans celle des ensembles pointés.

Proposition 3.4.4. Soient $u: A \to B$ un morphisme de faisceaux

de groupes, P (resp. Q) un torseur sous A (resp. B) et $p \in H^1(A)$ (resp. $q \in H^1(B)$) sa classe. La relation $q = u^{(1)}(p)$ équivaut à l'existence d'un u-morphisme $P \to Q$.

(Réf. III, 2.4.2.2)

Corollaire 3.4.5. Soient $u: A \to B$ un isomorphisme de faisceaux de groupes, P un A-torseur et $p \in H^1(A)$ la classe de celui-ci. $u^{(1)}(p)$ est la classe du B-torseur obtenu en faisant opérer B sur P par $(p,b) \rightsquigarrow pu^{-1}(b)$.

(Réf. III, 2.4.7)

Corollaire 3.4.6. Soient A un faisceau de groupes, $a \in H^0(E,A)$ et u l'automorphisme intérieur défini par a. L'application $u^{(1)}: H^1(A) \to H^1(B)$ est l'identité.

(Réf. III, 2.4.8)

Proposition 3.4.7. Le foncteur $A \to H^1(A)$ commute aux produits finis.

Plus précisement, si A et B sont deux groupes de $\tilde{E}$, on a une $\tilde{E}$-équivalence de $\tilde{E}$-champs

(3.4.7.1) $\quad TORS(\tilde{E},A\times B) \to TORS(\tilde{E},A)\times_{\tilde{E}} TORS(\tilde{E},B)$

dont les composantes sont les foncteurs extension du groupe structural définis par les projections de $A\times B$. Le foncteur $A \rightsquigarrow H^1(A)$ transforme donc groupes en groupes. En explicitant on trouve ce qui suit.

Proposition 3.5. Soit A un faisceau de groupes abéliens sur un site E. L'ensemble sous-jacent à $H^1(A)$ est muni d'une structure de groupe abélien dont l'élément neutre est la classe unité. Si

P et Q sont deux A-torseurs, le produit de leurs classes est la classe du produit contracté $P \overset{A}{\wedge} Q$, [quotient de $P \times Q$ par A opérant par $(p,q,a) \rightsquigarrow (pa, qa^{-1})$; les opérations de A sur $P \overset{A}{\wedge} Q$ sont obtenues par passage au quotient à partir de $(p,q,a) \rightsquigarrow (p,qa)$]. L'inverse de la classe d'un A-torseur P est celle de l'opposé P^o de P (2.5.4). Si $u: A \to B$ est un morphisme de faisceaux de groupes abéliens, l'application $u^{(1)}$ est un morphisme de groupes.

3.5.1. La catégorie $\tilde{E}$-ab des faisceaux de groupes abéliens sur E possède suffisament d'injectifs, ce qui permet de construire les foncteurs dérivés de $A \rightsquigarrow H^0(A)$ (SGAA, 5 ou T), que l'on notera provisoirement

(3.5.2) $\quad H^i_\cdot(A)$.

Pour toute suite exacte d'objets de $\tilde{E}$-ab (notés additivement)

(3.5.3) $\quad 0 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 0$,

on a donc un opérateur cobord

(3.5.4) $\quad d: H^0(C) \to H^1_\cdot(A)$.

Par ailleurs, pour toute section $c \in H^0(C)$, l'image inverse de c par v est un sous-faisceau D(c) de B sur lequel A opère par $(a,\beta) \rightsquigarrow u(a) + \beta$. On prouve aisément que D(c) est un A-torseur.

Proposition 3.5.5. Il existe un unique isomorphisme de foncteurs (définis sur $\tilde{E}$-ab, à valeurs dans $\underline{U}$-ab)

(3.5.5.1) $\quad i^1(*) : H^1_\cdot(*) \to H^1(*)$

tel que, pour toute suite exacte telle que (3.5.3) et tout $c \in H^0(C)$ la classe du A-torseur $D(c)$ soit égale à $i^1(A)(d(c))$.

3.5.5.2. On trouvera une démonstration dans (Réf. III, 3.5.4). Nous identifierons désormais $H^1_.$ et H^1, la proposition ci-dessus disant comment il faut interpréter géométriquement les opérateurs cobords. Calculons i^1. Si l'on considère (3.5.3) comme une résolution de A, il existe un morphisme de (3.5.3) dans une résolution injective de A, d'où un morphisme de groupes

(3.5.5.3) $\quad d' : H^0(C)/H^0(B) \to H^1_.(A).$

D'après (M, chap. V, Prop. 7.1), celui-ci est l'opposé du morphisme induit par le cobord d. Si $c \in H^0(C)$, l'image de c par le composé $i^1(A)d'$ est donc la classe du torseur obtenu en faisant opérer A sur $D(c)$ par $(a,\beta) \rightsquigarrow \beta - u(a)$.

3.6. Localisation. Soit A un faisceau de groupes sur un site E. Pour tout $S \in Ob(E)$ on posera

(3.6.1) $\quad H^0(E_{/S},A) = Hom(e(S),A)$

et on notera

(3.6.2) $\quad H^1(E_{/S},A)$

l'ensemble des classes à isomorphisme près de A-torseurs sur S. (3.1.2). Puisque $TORS(E,A)$ est une E-catégorie fibrée, on a, pour toute flèche $f: T \to S$ de E, des morphismes

(3.6.3) $\quad H^i(E_{/S},A) \to H^i(E_{/T},A)$, $\quad i = 0,1$;

puisque le foncteur extension du groupe structural (3.4.1) est cartésien, ce sont des morphismes de foncteurs en A.

3.7. Procédés de calcul.

Nous nous contenterons d'établir un dictionaire. Soient E un U-site et S un objet final de E, fixés jusqu'à la fin de ce numéro. Si (P,A) est un torseur, l'ensemble des objets $S' \to S$ de E tels que P(S) soit non vide est raffinement R de S, (I, 3.0). On a donc

$$\underline{\mathrm{Tors}}(E,A) = \bigcup_{R \in J(S)} \underline{\mathrm{Tors}}(E,A)^R \tag{3.7.1}$$

$$H^1(E,A) = \bigcup_{R \in J(S)} H^1(E,A)^R ,$$

où J(S) désigne l'ensemble des raffinements de S et où l'exposant R signifie que l'on se limite aux torseurs tels que, pour tout $S' \in Ob(R)$, $P(S') \neq \emptyset$.

3.5.2. Soit $\underline{S} = (S_i \to S)$, $i \in I$, une famille couvrante de E. Pour tout faisceau de groupes A, on appelle 1-cocycle de $\underline{S}$ à valeurs dans A une famille

$$u_{ij} \in A(S_{ij}) , \ (i,j) \in I \times I , \ S_{ij} = S_i \times_S S_j , \tag{3.7.2.1}$$

telle que l'on ait

$$u_{ij}{}^{k} . u^{i}{}_{jk} = u_{i}{}^{j}{}_{k} , \ (i,j,k) \in I \times I \times I , \tag{3.7.2.2}$$

où $u_{ij}{}^{k}, u^{i}{}_{jk}$ et $u_{i}{}^{j}{}_{k}$ désignent respectivement les images de u_{ij}, u_{jk} et u_{ik} par les applications associées par A aux projections évidentes de $S_{ijk} = S_i \times_S S_j \times_S S_k$. On dit que deux cocycles u et v sont cohomologues s'il existe une famille

$$a_i \in A(S_i) , \ i \in I , \tag{3.7.2.3}$$

telle que l'on ait

(3.7.2.4) $v_{ij} = a_i{}^j . u_{ij} . (a^i{}_j)^{-1}$, $(i,j) \in I \times I$,

où $a_i{}^j$ (resp. $a^i{}_j$) désigne l'image inverse de a_i (resp. a_j) par l'application $A(S_i) \to A(S_{ij})$ (resp. $A(S_j) \to A(S_{ij})$). On désigne par

(3.7.2.5) $H^1(\underline{S},A)$

l'ensemble des classes de cocycles cohomologues.

3.7.2.6. Si E est le site des ouverts d'un espace topologique, les $S_i \to S$ sont des monomorphismes; l'on peut alors ne considérer que des cocycles vérifiant $u_{ij} = u_{ji}^{-1}$ et oublier les indices supérieurs.

Proposition 3.7.3. Sous les hypothèses de (3.7.2), soit R le raffinement de S engendré par $\underline{S}$. En associant à tout A-torseur P sur S muni de sections $p_i \in P(S_i)$, $i \in I$, le cocycle défini par

(3.7.3.1) $p_i{}^j . u_{ij} = p^i{}_j$, $(i,j) \in I \times I$,

on définit une bijection

(3.7.3.2) $H^1(E,A)^R \xrightarrow{\sim} H^1(\underline{S},A)$ (3.5.1)

qui est fonctorielle en A et respecte le point marqué. (Nota: $p_i{}^j$ est l'image de p_i par $P(S_i) \to P(S_{ij})$).

(Réf. III, 3.6.3)

3.7.3.3. Soient $\underline{T}$ un topos, (P,A) un torseur de $\underline{T}$ et $\underline{P}$ la famille couvrante réduite au morphisme final $P \to e$. La diagonale est une section de $P \times P$ (considéré comme A-torseur sur P) et détermine donc un cocycle canonique de $\underline{P}$ à valeurs

dans A. Ce n'est autre que le composé

$$P\times P \xrightarrow{i} P\times A \xrightarrow{j} A$$

où j est la seconde projection et i l'inverse de l'isomorphisme $i^{-1}(p,a) = (p,pa)$.

3.7.3.4. D'après (Réf. III, 3.6.8), si A est abélien, le morphisme $H^1(\underline{S},A) \to H^1_{\cdot}(E,A)$ défini en algèbre homologique (SGAA, V, §5.2.4) est égal à celui déduit de l'inclusion $H^1(E,A)^R \subset H^1(E,A)$ par les isomorphismes (3.7.3.2) et (3.5.5.1).

3.7.4. Cohomologie des groupes. Soient G un groupe appartenant à U et $\underline{G}$ le U-topos des G-objets à gauche de U-ens. A tout torseur à droite (P,A) de $\underline{G}$ on associe classiquement (CG) un cocycle

(3.7.4.1) $a_s \in A$, $s \in G$,

de G à valeurs dans A vérifiant

(3.7.4.2) $a_{st} = a_s.s(a_t)$, $s,t \in G$,

en choisissant un élément $p \in P$ et en imposant

(3.7.4.3) $s(p) = p.a_s$, $s \in G$.

D'après (CG), on définit ainsi un isomorphisme entre $H^1(\underline{G},A)$ et l'ensemble pointé $H^1(G,A)$ défini dans (CG).

Définition 3.7.5. Soient E un site standard, f: T → S une flèche de E et G un groupe (ordinaire) opérant à droite sur T par S-automorphisme. On dira que T/S est galoisien de groupe G si le faisceau sur S représenté par T est un torseur sous le faisceau associé au préfaisceau constant G.

3.7.5.1. On vérifie par passage au topos que l'hypothèse signifie que $f: T \to S$ est couvrant et que, pour tout $n \geq 1$, les morphismes

(3.7.5.2) $(id_T, g_1, \ldots, g_n): T \to (T/S)^{n+1}, (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$,

font du produit fibré $(T/S)^{n+1}$ une somme directe de G^n copies de T.

Proposition 3.7.6. Sous les hypothèses de (3.7.5), on a, pour tout faisceau de groupes A sur S, une équivalence

(3.7.6.1) $\underline{Tors}(S,A)^T \to \underline{Tors}(G,A(T))$, $P \rightsquigarrow P(T)$,

où $\underline{Tors}(S,A)^T$ est la catégorie des A-torseurs sur S qui sont trivialisés par $T \to S$.

3.7.6.2. Bien entendu, on fait opérer G à gauche sur $X(T)$, où X est un faisceau sur $E_{/S}$, par

(3.6.7.3) $s(x) = X(s)(x)$, $s \in G$, $x \in X(T)$.

La démonstration est évidente: données de descente. D'après (3.7.4), tout A-torseur P sur S trivialisé par $T \to S$ est donc caractérisé à isomorphisme près par la classe dans $H^1(G,A)$ du cocycle $a_s, s \in G$, $a_s \in A(T)$, défini par $X(s)(x) = p.a_s$, où $p \in P(T)$.

Exemple 3.7.7. Si l'on prend pour E le topos défini par un groupe profini U, les morphismes $U/V \to U/U$, où V est un sous-groupe ouvert invariant de U, sont galoisiens de groupe U/V et les raffinements qu'ils engendrent sont cofinaux dans l'ensemble de tous les raffinements de l'objet final U/U de E. Les considérations précédentes s'appliquent donc et redonnent

l'isomorphisme classique

$$(3.7.7.1)\qquad H^1(E,U) \xrightarrow{\sim} \bigcup_{V\subset U} H^1(U/V, A^V)\ ,$$

car pour tout V et tout $X \in Ob(E)$, $X(U/V)$ s'identifie à l'ensemble X^V des éléments de X invariants par V.

§4. Objets tordus.

Définition 4.1. Soient E un site, C un E-champ, $S \in Ob(E)$ et A un faisceau de groupes sur E. Un A-objet de C_S est un couple (x,u) où $x \in Ob(C_S)$ et où $u: A \to \underline{Aut}_S(x)$ est un morphisme de faisceaux de groupes sur S.

4.1.1. On définit de manière évidente le E-champ des A-objets de C que l'on note

$$(4.1.1.1)\qquad OPER(A;C).$$

On pose

$$(4.1.1.2)\qquad \underline{Opér}(A;C) = \underline{Lim}(OPER(A;C)/E)$$

et on l'appelle catégorie des A-objets à opérateurs de C; comme toujours, elle est équivalente à la fibre de $OPER(A;C)$ en l'objet final de E (s'il en existe). Si x et y sont deux objets d'une fibre $OPER(A;C)_S$, $S \in Ob(E)$, on notera

$$(4.1.1.3)\qquad \underline{Hom}_{S,A}(x,y) \quad (\text{resp. } Hom_{S,A}(x,y))$$

le faisceau (resp. l'ensemble) des S-morphismes de x dans y dans le champ $OPER(A;C)$ (I.2.4).

Proposition 4.1.2. Soient E un site, C un E-champ et A un faisceau de groupes sur E. Il existe un morphisme de champs

(4.1.2.1) $\quad Tw: TORS(E,A)\times_E OPER(A;C) \to C$

et un isomorphisme de morphisme de champs $OPER(A;C) \rightrightarrows C$ (via i)

(4.1.2.2) $\quad (x,u) \rightsquigarrow [i(x,u): x \xrightarrow{\sim} Tw(A_d,(x,u))]$,

tel que $i(x,u)$ identifie la structure d'objet à opérateur de x avec celle dont est muni $y = Tw(A_d,(x,u))$ grâce au composé des isomorphismes $A \xrightarrow{\sim} \underline{Aut}_A(A_d) \xrightarrow{\sim} \underline{Aut}(y)$, induits par les translations à gauche et par le foncteur Tw. Le couple (Tw,i) est unique à isomorphisme unique près.

4.1.2.3 (Réf. III, 2.3.1). Si P est un A-torseur sur $S \in Ob(E)$, et si x est un A-objet de C_S, on notera souvent

(4.1.2.4) $\quad P \overset{A}{\wedge} x \quad$ ou $\quad {}^P x$

l'objet $Tw(P,x)$ et on l'appellera <u>objet tordu de</u> x <u>par</u> P. Il est localement isomorphe à x, car, par construction, si $P \xrightarrow{\sim} A_d$ on a un isomorphisme canonique ${}^P x \to x$. La terminologie et les notations s'étendent d'elles-mêmes au cas où x est une <u>section cartésienne</u> de $OPER(A;C)$.

4.1.2.5. Si C est le champ des <u>faisceaux d'ensembles</u> sur E, on a un foncteur produit contracté (1.4.2), $(P,X) \rightsquigarrow P \overset{A}{\wedge} X$, et un isomorphisme $X \approx A_d \overset{A}{\wedge} X$. L'assertion d'unicité de (4.2.1) justifie donc, dans ce cas, la convention (4.2.1.4).

<u>Proposition 4.1.3</u>. Sous les hypothèses de (4.1.2) soient (x,u) un A-objet de C_S et P un A-torseur sur S, $S \in Ob(E)$. On a

un isomorphisme de $\underline{Aut}_S(x)$-torseurs[1]

(4.1.3.1) $\quad z\colon P \overset{A}{\wedge} \underline{Aut}_S(x) \xrightarrow{\sim} \underline{Isom}_S(x, {}^P x)$

et, pour tout $z \in Ob(C_S)$, des isomorphismes fonctoriels en z

(4.1.3.2) $\quad \underline{Hom}_S(x,z) \overset{A}{\wedge} P^o \xrightarrow{\sim} \underline{Hom}_S({}^P x, z) \xrightarrow{\sim} \underline{Hom}_A(P, \underline{Hom}_S(x,z))$

(4.1.3.3) $\quad P \overset{A}{\wedge} \underline{Hom}_S(z,x) \xrightarrow{\sim} \underline{Hom}_S(z, {}^P x) \xrightarrow{\sim} \underline{Hom}_A(P^o, \underline{Hom}_S(z,x))$.

4.1.3.4 (Réf. III, 2.3.3.2). D'après (1.5.2), z est déterminé par un A-morphisme $m\colon P \to \underline{Isom}_S(x, {}^P x)$; on prend pour m le composé $P \xrightarrow{\sim} \underline{Hom}_A(A_d, P) \xrightarrow{\varepsilon} \underline{Hom}_S(Tw(A_d, x), Tw(P,x))$ où ε est le morphisme défini par Tw. On construit les autres isomorphismes de l'énoncé en utilisant seulement m et les accouplements de composition (I, 2.4.4).

4.1.3.5. Par passage aux sections, les isomorphismes (4.1.3.2 et 3) déterminent ${}^P x$ par quatre <u>propriétés universelles</u> dans la catégorie fibre C_S. Il est d'ailleurs clair que l'on aurait pu <u>définir l'objet tordu de</u> x <u>par</u> P comme un couple (y,i), où y est un objet de C_S localement isomorphe à x et où $i\colon P \overset{A}{\wedge} \underline{Aut}_S(x) \xrightarrow{\sim} \underline{Isom}_S(x,y)$ est un isomorphisme de $\underline{Aut}_S(x)$-torseurs.

4.2. Sous les hypothèses de (4.1.2), si P est un A-torseur sur $S \in Ob(E)$ et si x est un A-objet de C_S, le foncteur Tw induit un morphisme de faisceaux de groupes

(4.2.1) $\quad \underline{ad}(P) = \underline{Aut}_A(P) \to \underline{Aut}_S({}^P x)$,

autrement dit, <u>le groupe adjoint opère sur</u> ${}^P x$.

[1] On fait opérer A sur $\underline{Aut}_S(x)$ grâce à u et aux translations à gauche.

Proposition 4.2.2. Sous les hypothèses de (4.1.2), pour tout A-torseur P on a une équivalence de E-champs

(4.2.2.1) $\mathrm{Tw}^P : \mathrm{OPER}(A;C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{OPER}(\underline{ad}(P);C), x \rightsquigarrow {}^P x.$

Si $P = A_d$, on a $A = \underline{ad}(P)$ et Tw^P est canoniquement isomorphe à l'identité.

4.2.2.2 (Réf. III, 2.3.4). En particulier, si x et y sont deux objets de $\mathrm{OPER}(A;C)_S$, on a une bijection

(4.2.2.3) $\mathrm{Hom}_{S,A}(x,y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S,\underline{ad}(P)}({}^P x, {}^P y),\ f \rightsquigarrow {}^P f,$

où ${}^P f = \mathrm{Tw}^P(f) = \mathrm{Tw}(id_P, f)$.

Corollaire 4.2.3. Soient (C,Q,B) et (B,P,A) des bitorseurs et soit $(C, Q \overset{B}{\wedge} P, A) = (C,R,A)$ leur produit. On a un isomorphisme canonique de morphismes de champs

(4.2.3.1) $\mathrm{Tw}^R \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tw}^Q \circ \mathrm{Tw}^P.$

4.2.3.2. (Réf. III, 2.3.4). L'assertion a un sens car $B \approx \underline{ad}(P)$ (2.4.1). Pour tout $x \in \mathrm{Ob}(\mathrm{OPER}(A;C)_S), S \in \mathrm{Ob}(E)$, on a donc

(4.2.3.3) $(Q \overset{B}{\wedge} P) \overset{A}{\wedge} x \xrightarrow{\sim} Q \overset{B}{\wedge} (P \overset{A}{\wedge} x)$

et en particulier

(4.2.3.4) $P^o \overset{B}{\wedge} P \overset{A}{\wedge} x \xrightarrow{\sim} A_d \overset{A}{\wedge} x \xrightarrow{\sim} x.$

Corollaire 4.2.4. Soient $\underline{T}$ un topos et (P,A) un torseur de $\underline{T}$. On a une équivalence de champs de topos sur $\underline{T}$

(4.2.4.1) $\mathrm{OPER}(\underline{T}, A^o) \xrightarrow{\sim} \mathrm{OPER}(\underline{T}, \underline{ad}(P)^o),\ X \rightsquigarrow P \overset{A}{\wedge} X.$

4.2.4.2. Aux notations près (I, 3.5.9), c'est l'équivalence (4.2.2.1) dans le cas où C est le $\underline{T}$-champ $\underline{Fl}(\underline{T})$ (I, 3.4.4).

En particulier, si X est muni d'une structure de groupe (de $\underline{T}$) compatible avec les opérations de A, l'objet $P \overset{A}{\wedge} X$ est muni d'une structure de groupe compatible avec les opérations de $\underline{ad}(P)$.

Corollaire 4.2.4.3. Soient $\underline{T}$ un topos, $u: A \to B$ un morphisme de groupes de $\underline{T}$ et P un A-torseur. Si l'on fair opérer A sur A et B par automorphismes intérieurs, le morphisme $P_u: {}^P A \to {}^P B$ obtenu en tordant u par P s'identifie canoniquement au morphisme adjoint $\underline{ad}(m): \underline{ad}(P) \to \underline{ad}(Q)$ (2.3.7) où $Q = P \overset{A}{\wedge} B$ et où $m: P \to Q$ est le morphisme structural.

4.2.4.4. D'après (4.1.3.5), pour identifier ${}^P A$ et $\underline{ad}(P)$ il suffit de décrire un A-morphisme

(4.2.4.5) $\quad f: P \to \underline{Isom}_{gr}(A, ad(P))$.

On pose $f(p)(a)(pa') = paa'$, où $p \in P(S)$, $a, a' \in A(S)$, $S \in Ob(\underline{T})$. On conclut alors aisément (Réf. III, 2.3.7).

Corollaire 4.2.5. Soient $\underline{T}$ un topos et (P,A) un torseur. On a une équivalence de $\underline{T}$-champs

(4.2.5.1) $\quad \Theta_P: TORS(\underline{T}, A) \to TORS(\underline{T}, {}^P A), \Theta_P(X) = X \overset{A}{\wedge} P^o$,

qui induit une bijection

(4.2.5.2) $\quad \theta_P: H^1(\underline{T}, A) \to H^1(\underline{T}, {}^P A)$,

laquelle applique la classe unité sur celle de P^o et celle de P sur la classe unité.

Résulte immédiatement de (4.2.4) en y échangeant la gauche et la droite. Si, de plus, Q est un ${}^P A$-torseur, on a d'après (4.2.3)

(4.2.5.3) $\theta_Q \circ \theta_P = \theta_R$, $R = Q \overset{P_A}{\wedge} P$,

Corollaire 4.2.5.4. Sous les hypothèses de (4.1.5), si A est commutatif on identifie A et ${}^{P}A$ (2.5.4) et l'on a

(4.2.5.5) $\theta_P(q) = q - p$, $q \in H^1(\underline{T},A)$.

(Réf. III, 2.6.3 (2))

Corollaire 4.2.5.6. Soient (P,A) et (Q,B) des torseurs d'un topos $\underline{T}$, u: A → B un morphisme de groupes et m: P → Q un u-morphisme. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(\underline{T},A) & \xrightarrow{u(1)} & H^1(\underline{T},B) \\ \theta_P \downarrow & & \downarrow \theta_Q \\ H^1(\underline{T},{}^{P}A) & \xrightarrow[{}^{P}u(1)]{} & H^1(\underline{T},{}^{P}B) \end{array}$$

(avec les notations de (4.2.4.3)).

Bien entendu, on a un énoncé plus précis en termes de morphismes de champs (Réf. III, 2.6.3.2(6)).

Théorème 4.3. Soient E un site, C un E-champ, S ∈ Ob(E) et x ∈ Ob(C_S). Posons $A = \underline{Aut}_S(x)$. Le foncteur $P \rightsquigarrow P \overset{A}{\wedge} x$ induit une équivalence entre la catégorie des A-torseurs sur S et la sous-catégorie $\underline{C}_S(x)$ de la fibre C_S dont les objets sont les y ∈ Ob(C_S) localement isomorphes à x et dont les flèches sont les S-isomorphismes. On obtient un quasi-inverse en associant à tout y ∈ Ob($C_S(x)$) le A-torseur $\underline{Isom}_S(x,y)$.

(Réf. III, 2.5.1)

Corollaire 4.3.1. On a une bijection

(4.3.1.1) $\eta_x : C(x) \xrightarrow{\sim} H^1(E_{/S}, A)$,

où $C(x)$ désigne l'ensemble des classes à isomorphisme près d'objets de $\underline{C}_S(x)$.

Corollaire 4.3.1.2. Soit encore $u : G \to A$ un morphisme de faisceaux de groupes (qui fait donc opérer G sur x). Pour tout G-torseur P, la classe de $P \overset{G}{\wedge} x$ est l'image de celle de P par $u^{(1)} : H^1(E_{/S}, G) \to H^1(E_{/S}, A)$.

(Réf. III, 2.5.2)

Corollaire 4.3.2. Soit encore $y \in Ob(\underline{C}_S(x))$. Posons $P = \underline{Isom}_S(x,y)$. On a un isomorphisme canonique ${}^P A \approx \underline{Aut}_S(y)$ et

(4.3.2.1) $\theta_P(\eta_x(z)) = \eta_y(z)$, $z \in Ob(\underline{C}_S(x))$, (4.2.5.2).

En effet, $\underline{Isom}_S(x,y)$ est un $\underline{Aut}_S(y)$-$\underline{Aut}_S(x)$-bitorseur et, par ailleurs, on a un accouplement de composition

$$\underline{Isom}_S(x,z) \times P \to \underline{Isom}_S(y,z) , \quad (a,b) \rightsquigarrow ba^{-1} .$$

Corollaire 4.3.3. Sous les hypothèses de (4.3), soit encore $f : C \to C'$ un morphisme de champs. Posons $x' = f(x)$, $A' = \underline{Aut}_S(x')$ et soit $u : A \to A'$ le morphisme induit par f. Si ξ et ξ' désignent les classes de x et x' dans $H^1(E_{/S}, A)$ et $H^1(E_{/S}, A')$, on a $u^{(1)}(\xi) = \xi'$.

En effet, pour tout $y \in Ob(\underline{C}_S(x))$, on a un u-morphisme $\underline{Isom}_S(x,y) \to \underline{Isom}_S(f(x), f(y))$ induit par f.

§5. La suite exacte en degré 1.

Dans tout ce paragraphe, $\underline{T}$ désigne un $\underline{U}$-topos et e son objet final.

5.1. Le premier opérateur cobord.

Proposition 5.1.1. Soient A un groupe de T et X un A-objet à droite de T. Soit Y = X/A le quotient de X par A dans T.

(i) Pour toute section y de Y, l'image inverse de y par la projection X → Y est un espace homogène sous A (2.1); c'est un A-torseur lorsque A opère librement (2.1) sur X.

(ii) L'ensemble $H^0(Y)$ des sections de Y est isomorphe à l'ensemble des sous-objets de X, stables par A et sur lesquels A opère transitivement (2.1).

5.1.1.1. On trouvera d'autres renseignements sur les sections d'un quotient dans (Réf. III, 3.1.1 et 3.1.2). On traduit (i) en disant que deux sections de X ont même image dans Y si, et seulement si, elles sont congrues localement modulo A; si A opère librement sur X, elles sont alors congrues modulo A.

5.1.1.2. On explicite (ii) en associant à tout $y \in H^0(Y)$ son image inverse par X → Y et, inversement, à tout espace homogène H sous A muni d'un monomorphisme h: H → X sompatible avec les opérations de A, l'image du composé H → X → Y, qui est une section de Y car H/A ≈ e (2.1).

Corollaire 5.1.2. Si A opère librement sur X, l'application naturelle $H^0(X)/H^0(A) \to H^0(X/A)$ est injective et $H^0(X/A)$ s'identifie à l'ensemble des sous-A-torseurs de X.

Définition 5.1.3. Soit A un groupe de T opérant librement sur un $X \in Ob(T)$. On appelle application cobord l'application

(5.1.3.1) $\quad d: H^0(X/A) \to H^1(A)$

obtenue en associant à tout $x \in H^0(X/A)$ la classe de son image inverse par $X \to X/A$.

5.1.3.2. Soient encore $u: A \to A'$ un morphisme de groupes de $\underline{T}$, X' un A'-objet et $m: X \to X'$ un u-morphisme. Le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(X/A) & \xrightarrow{d} & H^1(A) \\ {\scriptstyle n(0)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u(1)} \\ H^0(X'/A') & \longrightarrow & H^1(A') \end{array}$$

où d et d' sont les cobords et où $n: X/A \to X'/A'$ est déduit de m par passage au quotient.

Corollaire 5.1.4. Sous les hypothèses de (5.1.2), soit $q: X \to Y$ la projection. La suite d'ensembles pointés

$$H^0(X) \xrightarrow{q(0)} H^0(X/A) \xrightarrow{d} H^1(A)$$

est exacte. Pour que la classe $p \in H^1(A)$ d'un A-torseur P appartienne à l'image de d il faut et il suffit que $P \overset{A}{\wedge} X^o$ ait une section.

5.1.4.1 (Réf. III, 3.1.4). On peut décrire les fibres de d par torsion (Réf. III, 3.1.4.3). Une suite $L \xrightarrow{a} M \xrightarrow{b} N$ de morphismes d'ensembles pointés est dite exacte si l'image inverse par b de l'élément marqué de N est l'image de a.

5.2. Cas d'un sous-groupe.

Définition 5.2.1. Soit $u: A \to B$ un morphisme de groupes de $\underline{T}$.

Un relèvement à A d'un B-torseur Q est un couple (P,p) où P est un A-torseur et p: P → Q est un u-morphisme.

5.2.1.1. La donnée de p équivaut à celle d'un B-isomorphisme $P \overset{A}{\wedge} B \longrightarrow Q$. Si u est un monomorphisme, la catégorie des relèvements de Q à A est rigide: deux objets isomorphes le sont canoniquement.

Proposition 5.2.2. Soit u: A → B un monomorphisme de groupes de T.

(i) La catégorie des A-torseurs est équivalente à celle des couples (Q,q), où Q est un B-torseur et q une section de Q/A.

(ii) Soit Q un B-torseur. L'ensemble des sections de Q/A est isomorphe à celui des [classes de] relèvements de Q à A.

5.2.2.1 (Réf. III, 3.2.1). On définit l'équivalence de (i) en associant à tout A-torseur P le B-torseur $P \overset{A}{\wedge} B$ muni de la section image du composé P → Q → Q/A. On définit la bijection de (ii) en associant à toute section de Q/A son image inverse par Q → Q/A.

Corollaire 5.2.3. Soit v: B → B/A la projection. L'application $u^{(0)}: H^0(A) \to H^0(B)$ est un monomorphisme de groupes. Le morphisme v induit une injection

$$H^0(B)/H^0(A) \hookrightarrow H^0(B/A)$$

compatible avec les opérations du groupe $H^0(B)$ définies par les translations à gauche. Le cobord d induit une injection

$$H^0(B)\backslash H^0(B/A) \hookrightarrow H^1(A)$$

dont l'image est l'ensemble des $p \in H^1(A)$ tels que $u^{(1)}(p)$ soit la classe unité de $H^1(B)$.

(Réf. III, 3.2.3)

Corollaire 5.2.4. On a une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \longrightarrow H^0(A) \xrightarrow{u^{(0)}} H^0(B) \xrightarrow{v^{(0)}} H^0(B/A) \xrightarrow{d} H^1(A) \xrightarrow{u^{(1)}} H^1(B)$$

dans laquelle $u^{(0)}$ est un monomorphisme de groupes.

Proposition 5.2.5. Soient P un A-torseur, $p \in H^1(A)$ sa classe et ${}^Pu: {}^PA \to {}^PB$ le morphisme de groupes de $\underline{T}$ obtenu en tordant $u: A \to B$ par P (4.2.4.3). On a une bijection

$$H^0({}^PB)\backslash H^0({}^PB/{}^PA) \xrightarrow{\sim} \{p' \in H^1(A), v^{(1)}(p') = v^{(1)}(p)\}.$$

5.2.5.1. En effet, d'après (4.2.5.6), on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(B) & \longrightarrow & H^0(B/A) & \xrightarrow{d} & H^1(A) & \longrightarrow & H^1(B) \\ & & & & \theta_P \downarrow & & \downarrow \theta_Q \qquad Q = P \overset{A}{\wedge} B \\ H^0({}^PB) & \longrightarrow & H^0({}^PB/{}^PA) & \xrightarrow{d'} & H^1({}^PA) & \longrightarrow & H^1({}^PB) \end{array}$$

Remarque 5.2.6 (Exactitude en $H^1(B)$). Soit Q un B-torseur. D'après (5.2.1(ii)), pour que la classe q de Q appartienne à l'image de $u^{(1)}$ il faut et il suffit que Q/A admette une section. On notera que Q/A, muni des opérations évidentes de $\underline{ad}(Q)$ est un espace homogène sous $\underline{ad}(Q)$: ce n'est autre que l'objet tordu ${}^Q(B/A)$ obtenu en faisant opérer B par translations à gauche.

5.3. Cas d'un sous-groupe invariant.

5.3.0. On fixe dans tout ce numéro une suite exacte de groupes de $\underline{T}$

$$(*) \qquad 1 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 1$$

On entend par là que u est le noyau de v et que le morphisme de $\underline{T}$ sous-jacent à v est un épimorphisme, ce qui entraîne que v identifie C au quotient B/A.

Proposition 5.3.1. La suite d'ensembles pointés

$$1 \to H^0(A) \xrightarrow{u^{(0)}} H^0(B) \xrightarrow{v^{(0)}} H^0(C) \xrightarrow{d} H^1(A) \xrightarrow{u^{(1)}} H^1(B) \xrightarrow{v^{(1)}} H^1(C)$$

est exacte. De plus, $v^{(0)}$ est un morphisme de groupes dont le noyau est $u^{(0)}$.

(Réf. III, 3.3.1)

5.3.2. Si $c \in H^0(C)$, l'image inverse X de c par $v: B \to C$ est ici un A-bitorseur, ce qui permet de définir

(5.3.2.1) $\qquad p \times c \,, \quad p \in H^1(A) \,, \quad c \in H^0(C) \,,$

comme la classe du produit contracté $P \overset{A}{\wedge} X$, où P est un représentant de p.

Proposition 5.3.3. Le groupe $H^0(C)$ opère à droite sur $H^1(A)$ par la formule (5.3.2.1) et l'on a

(5.3.3.1) $\qquad d(cc') = d(c) \times c' \,, \quad c, c' \in H^0(C) \,.$

De plus, B opère sur A par automorphismes intérieurs, donc sur $H^1(A)$ par fonctorialité. On pose

(5.3.3.2) $\qquad {}^b p = \mathrm{Int}(b)^{(1)}(p) \,, \quad \mathrm{Int}(b)(a) = bab^{-1}, \quad b \in H^0(B), p \in H^1(A)$

et l'on a

(5.3.3.3) $\qquad {}^{b}p = p \times c\,, \quad c = v^{(0)}(b^{-1}).$

L'application $u^{(1)}$ induit une injection

(5.3.3.4) $\qquad H^1(A)/H^0(C) \to H^1(B).$

(Réf. III, 3.3.3)

Corollaire 5.3.4. Soit P un A-torseur. La suite

(5.3.4.1) $\qquad 1 \to A' \xrightarrow{u'} B' \xrightarrow{v'} C \to 1$

obtenue en tordant (*) par P (4.2.4.3) est exacte (nota: A opère trivialement sur C). On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^0(B) & \xrightarrow{v^{(0)}} & H^0(C) & \xrightarrow{d} & H^1(A) & \xrightarrow{u^{(1)}} & H^1(B) & \xrightarrow{v^{(1)}} & H^1(C) \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \theta_P} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_Q} & & \| \quad \text{id} \\
H^0(B') & \xrightarrow{v'^{(0)}} & H^0(C) & \xrightarrow{d'} & H^1(A') & \xrightarrow{u'^{(1)}} & H^1(B') & \xrightarrow{v'^{(1)}} & H^1(C)
\end{array}$$

où $Q = P \overset{A}{\wedge} B$. De plus, si $p \in H^1(A)$ désigne la classe de p, on a

(5.3.4.2) $\qquad \theta_p(p \times c) = d'(c)\,, \quad c \in H^0(C),$

et le stabilisateur de p dans $H^0(C)$ est l'image de $v'^{(0)}$.

(Réf. III, 3.3.4)

Proposition 5.3.5. Soit Q un B-torseur. La suite

$$1 \to A' \to B' \to C' \to 1$$

obtenue en tordant (*) par Q est exacte et l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1(A) & \xrightarrow{u^{(1)}} & H^1(B) & \xrightarrow{v^{(1)}} & H^1(C) \\ & & \downarrow \theta_Q & & \downarrow \theta_R \\ H^1(A') & \xrightarrow{u'^{(1)}} & H^1(B') & \xrightarrow{v'^{(1)}} & H^1(C') \end{array}$$

où $R = Q \overset{B}{\wedge} C$. Si $q \in H^1(B)$ est la classe de Q, l'image inverse de $v^{(1)}(q)$ est isomorphe à l'image de $u'^{(1)}$

(Réf. III, 3.3.5)

5.4. Cas d'un sous-groupe invariant abélien ou central.

On fixe dans tout ce numéro une suite exacte de groupes de T telle que A soit commutatif

$$(*) \qquad 1 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 1 .$$

Proposition 5.4.1. Le groupe $H^0(C)$ opère à gauche sur $H^1(A)$ par automorphismes de groupes:

$$(5.4.1.1) \qquad {}^c p = \mathrm{Int}(c)^{(1)}(p) , \quad \mathrm{Int}(c)(a) = cac^{-1} ,$$

où $c \in H^0(C)$, $p \in H^1(A)$. On a

$$(5.4.1.2) \qquad p \times c = {}^{(c^{-1})}p + d(c) ,$$

(cf. (5.3.2.1); le groupe $H^1(A)$ est noté additivement) et

$$(5.4.1.3) \qquad {}^b p = {}^c p , \ b = H^0(B), \ p = H^1(A), \ c = v^{(0)}(b).$$

Le cobord d est un morphisme croisé:

$$(5.4.1.4) \qquad d(cc') = {}^{c^{-1}} d(c) + d(c') , \quad c, c' \in H^0(C).$$

(Réf. III, 3.4.1)

Corollaire 5.4.2. Soit P un A-torseur. La formule (5.3.4.2) s'écrit (avec les mêmes notations)

$$(5.4.2.1) \quad d(c) - d'(c) = p - {}^{c^{-1}} p , \ p \in H^1(A), \ c \in H^0(C) ,$$

où p est la classe de P.

(Réf. III, 3.4.2)

Proposition 5.4.3. Si A est central dans B, la suite

(5.4.3.1) $1 \longrightarrow H^0(A) \xrightarrow{u^{(0)}} H^0(B) \xrightarrow{v^{(0)}} H^0(C) \xrightarrow{d} H^1(A)$

est une suite exacte de groupes. On a

(5.4.3.2) $p \times c = p + d(c)$, $p \in H^1(A)$, $c \in H^0(C)$,

où $p \times c$ est défini par (5.3.2.1). L'application $u^{(1)}$ induit une injection du groupe quotient $H^1(A)/H^0(C)$ dans $H^1(B)$.

(Réf. III, 3.4.3)

Remarque 5.4.4. Supposant encore que A est central dans B, on a, pour tout B-torseur Q, un morphisme de groupes de T

(5.4.4.1) $u' : A \to \underline{ad}(Q)$, $u'(a)(q) = qu(a)$,

qui fait opérer A dans Q par B-automorphismes. Ceci permet, pout tout A-torseur P de définir le produit contracté $P \overset{A}{\wedge} Q$, lequel est un B-torseur de façon naturelle. On notera

(5.4.4.2) $p \cdot q$, $p \in H^1(A)$, $q \in H^1(B)$,

la classe de $P \overset{A}{\wedge} Q$, si p et q désignent celles de P et Q.

5.4.4.3. En tordant la suite (*) par un B-torseur, Q, on trouve une suite exacte

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{u'} B' \xrightarrow{v'} C' \longrightarrow 1$$

car B opère trivialement sur A. Il est aisé de vérifier que si l'on identifie B' et $\underline{ad}(Q)$ comme il est dit dans (4.2.4.3) le morphisme u' s'identifie à celui de (5.4.4.1).

5.4.4.4. Puisque A est central dans B, C opère sur A grâce aux automorphismes intérieurs de B, donc, par fonctorialité, le groupe $H^0(C)$ opère à gauche sur $H^1(B)$ en respectant le point marqué, opérations notées

(5.4.4.5) $\quad {}^c q \ , \quad c \in H^0(C) \ , \quad q \in H^1(B).$

Proposition 5.4.5. Supposons A central dans B. Le groupe $H^1(A)$ opère sur $H^1(B)$ (loi $p.q$ (5.4.4.2)) et l'on a

(5.4.5.1) $\quad u^{(1)}(p+q) = p.u^{(1)}(q) \ , \quad p, q \in H^1(A),$

(5.4.5.2) $\quad u^{(1)}(p) = p.1 \ , \ p \in H^1(A),$ (1 = classe neutre de $H^1(B)$),

(5.4.5.3) $\quad d(c).q = {}^{c^{-1}} q \ , \ c \in H^0(C), \ q \in H^1(B) \ ,$

De plus, l'application $v^{(1)}: H^1(B) \to H^1(C)$ induit une injection

(5.4.5.4) $\quad H^1(A) \backslash H^1(B) \to H^1(C)$

(Réf. III, 3.4.5)

Proposition 5.4.6. Supposons A central dans B. Soient Q un B-torseur et $q \in H^1(B)$ sa classe. Le stabilisateur de q dans $H^1(A)$ (pour la loi $p.q$) est l'image du cobord $d': H^0(C') \to H^1(A)$ attaché à la suite (5.4.4.3) obtenue en tordant (*) par Q. De plus, dans le diagramme (5.3.5), on a $A = A'$ et

(5.4.6.1) $\quad u'^{(1)}(p) = \theta_Q(p.q) \ , \quad p \in H^1(A).$

(Réf. III, 3.4.5)

Chapitre III. Liens et gerbes.

Dans tout ce chapitre, E désigne un U-site.

§1. Liens sur un site.

1.1. Le champ des liens.

Proposition 1.1.1. Soient E un U-site et FAGR(E) le champ des U-faisceaux de groupes sur E (I, 3.5.7). Il existe un E-champ LIEN(E) et un morphisme de E-champs

(1.1.1.1) $\quad \underline{lien}(E)\colon \mathrm{FAGR}(E) \to \mathrm{LIEN}(E)$

tels que, pour tout E-champ X, le foncteur

(1.1.1.2) $\quad \underline{Cart}_E(\mathrm{LIEN}(E),X) \to \underline{Cart}_E(\mathrm{FAGR}(E),X),\ m \rightsquigarrow m.\underline{lien}(E)$,

induise une équivalence entre la première et la sous-catégorie pleine de $\underline{Cart}_E(\mathrm{FAGR}(E),X)$ dont les objets sont les morphismes de champs $m\colon \mathrm{FAGR}(E) \to X$ tels que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, tout faisceau de groupes F sur S et tout automorphisme intérieur I de $F, m(I)$ soit l'identité de $m(F)$.

1.1.1.3. Cette propriété caractérise LIEN(E) à E-équivalence près, l'équivalence étant unique à isomorphisme unique près. Il sera commode de choisir une solution de la manière suivante. On désigne par LI(E) la catégorie qui a mêmes objets que FAGR(E), les S-morphismes $F \to G$, où F et G sont des faisceaux de groupes sur $E_{/S}$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, étant les sections du faisceau quotient

(1.1.1.4) $\quad \underline{Hex}(F,G) = G \backslash \underline{Hom}(F,G)/F \approx \underline{Hom}(F,G)/G,$

[F et G opèrent par automorphismes intérieurs]. On pose enfin

(1.1.1.5) $\quad LIEN(E) = \underline{A}(LI(E))$, (I, 4.1.4) ,

et l'on prouve aisément la proposition ci-dessus (Réf. IV, 1.1.8).

Définition 1.1.2. Soit E un U-site. LIEN(E) est appelé le champ des liens sur E. Un lien sur E est un objet de la catégorie

(1.1.2.1) $\quad \underline{Lien}(E) = \underline{Lim}(LIEN(E)/E)$

des liens sur E. Un lien sur S, $S \in Ob(E)$, est un objet de la fibre $LIEN(E)_S$.

1.1.2.2. Si e est un objet final de E, on a une équivalence

(1.1.2.3) $\quad \underline{Lien}(E) \xrightarrow{\approx} LIEN(E)_e$,

autrement dit, un lien sur E s'interprète comme un lien sur e.

Définition 1.1.3. Un représentant d'un lien L sur E est un couple (F,r), où F est un faisceau de groupes sur E et où $r: \underline{lien}(F) \xrightarrow{\sim} L$ est un isomorphisme de liens. Un lien est dit représentable s'il admet un représentant.

1.1.3.1. On notera encore

(1.1.3.2) $\quad \underline{lien}(E): \underline{Fagr}(E) \to \underline{Lien}(E)$ (ou $\underline{lien}$)

le foncteur induit par $\underline{lien}(E)$ sur les catégories de sections; il associe donc à un faisceau de groupes F le lien représenté par F.

Proposition 1.1.4. Tout lien est localement représentable. Si F et G sont des faisceaux de groupes, on a un isomorphisme canonique (induit par $\underline{lien}(E)$)

(1.1.4.1) $\quad \underline{Hom}(F,G)/G \longrightarrow \underline{Hom}(\underline{lien}(F), \underline{lien}(G))$,

et un isomorphisme de faisceaux de groupes

(1.1.4.2) $\underline{\mathrm{Aut}}(F)/\underline{\mathrm{Int}}(F) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Aut}}(\underline{\mathrm{lien}}(F))$.

(Réf. IV, 1.1.7)

Corollaire 1.1.5. Soient A un faisceau de groupes et Z son centre. Posons

(1.1.5.1) $\underline{\mathrm{Int}}(A) = A/Z$, $\underline{\mathrm{Out}}(A) = \underline{\mathrm{Aut}}(A)/\underline{\mathrm{Int}}(A)$.

(i) On a $\underline{\mathrm{Out}}(A) \approx \underline{\mathrm{Aut}}(\underline{\mathrm{lien}}(A))$ et l'ensemble des liens localement isomorphes à $\underline{\mathrm{lien}}(A)$ est isomorphe à $H^1(E, \underline{\mathrm{Out}}(A))$.

(ii) Soit B un faisceau de groupes. Pour que $\underline{\mathrm{lien}}(B)$ soit isomorphe à $\underline{\mathrm{lien}}(A)$ il faut et il suffit qu'il existe un $\underline{\mathrm{Int}}(A)$-torseur P tel que $B \approx {}^P A$ (I, 4.2.4). Auquel cas il existe des isomorphismes canoniques

(1.1.5.2) $\underline{\mathrm{lien}}({}^P A) \approx {}^P\underline{\mathrm{lien}}(A) \approx \underline{\mathrm{lien}}(A)$.

Immédiat: (II, 4.3.1, II, 5.3.1).

Proposition 1.1.6. (Liens abéliens). Le foncteur lien induit une équivalence entre la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur E et la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Lien}}(E)$ dont les objets (appelés liens abéliens) sont les liens localement représentables par un faisceau de groupes abéliens.

Proposition 1.1.7. Soit E un U-site. On a une équivalence de $\tilde{E}$-champs

(1.1.7.1) $\mathrm{LIEN}(E)^* \xrightarrow{\approx} \mathrm{LIEN}(\tilde{E})$, (I, 5.6.1),

et une équivalence de E-champs $\mathrm{LIEN}(E) \approx \mathrm{LIEN}(\tilde{E}) \times_{\tilde{E}} E$.

1.1.7.2. D'après (I, 5.8), on a une équivalence

$FAGR(E) \to FAGR(\tilde{E}) \times_{\tilde{E}} E$, d'ou la seconde équivalence par (1.1.1) et la première par (I, 5.7 (iv)), (Réf. IV, 1.1.11).

Corollaire 1.1.7.3. On a une équivalence $\underline{Lien}(E) \xrightarrow{\sim} \underline{Lien}(\tilde{E})$.

1.1.8. Localisation. La formule (1.1.1.5) montre que, pour tout $S \in Ob(E)$, on a un isomorphisme canonique $LIEN(E_{/S}) \xrightarrow{\sim} LIEN(E) \times_E E_{/S}$. La catégorie des liens sur le site $E_{/S}$ est donc isomorphe à la catégorie des sections cartésiennes de $LIEN(E)$ au dessus de $E_{/S}$. Elle est donc aussi équivalente a la catégorie $LIEN(E)_S$ des liens sur S. Si $L: E \to LIEN(E)$ est un lien sur E et si $S \in Ob(E)$, on dira que $L(S)$ est la restriction de L à S; le lien sur $E_{/S}$ qui lui correspond est la restriction de L à $E_{/S}$. On se permettra de ne plus faire de différence entre un lien sur S et un lien sur le site $E_{/S}$.

1.2. Propriétés de la catégorie des liens.

Nous allons étudier comment les propriétés élémentaires de la catégorie des faisceaux de groupes se transmettent à celle des liens.

Proposition 1.2.1. Le lien représenté par le faisceau de groupes nul est un objet à la fois initial et final de la catégorie des liens.

1.2.1.1. On le notera souvent 1 et on l'appellera lien unité; si L et M sont des liens, on notera $L \xrightarrow{1} M$ le composé $L \to 1 \to M$.

Proposition 1.2.2. Il existe un morphisme de E-champs

(1.2.2.1) $\qquad LIEN(E) \to LIEN(E)$, $\quad L \rightsquigarrow L^o$,

tel que si G représente L l'opposé G^o de G représente L^o. Il existe un isomorphisme de morphismes de champs s

(1.2.2.2) $\quad L \rightsquigarrow [s(L): L \xrightarrow{\sim} L^o]$

tel que, si G représente L, l'isomorphisme $G \to G^o$, $x \rightsquigarrow x^{-1}$, représente s(L).

Résulte formellement de (1.1.1), cf. (Réf. IV, 1.2.5).

Définition 1.2.3. On dira qu'un morphisme de liens $u: L \to M$ est injectif, ou surjectif, ou central, ou normal s'il existe un raffinement R de E et, pour tout $S \in Ob(R)$, un représentant $u': A' \to B'$ de la restriction de u à S qui soit un monomorphisme, ou un épimorphisme, ou qui applique A' dans le centre de B' ou qui soit tel que u'(A') soit invariant dans B'.

1.2.3.1. On notera que ces conditions sont stable par changement de base et de nature locale; en effet, si u vérifie l'une d'elle, tout représentant de u vérifie la condition correspondante pour les morphismes de faisceaux de groupes.

Lemme 1.2.3.2. Pour qu'un morphisme de faisceaux de groupes soit un monomorphisme (resp. épimorphisme) il faut et il suffit qu'il en soit ainsi du morphisme de faisceaux d'ensembles sous-jacent.

Pour "épimorphisme", on pourra utiliser [Serge Lang, Algebra, Chap. I, §8, Prop. 9]

Proposition 1.2.4. Un morphisme de liens

(i) qui est injectif et surjectif est un isomorphisme, et réciproquement,

(ii) qui est surjectif est un épimorphisme, et réciproquement,

(iii) qui est central est un monomorphisme, si, et seulement si, il est injectif.

1.2.4.1. (Réf. IV, 1.2.7). Le foncteur lien(E): Fagr(E) → Lien(E) ne transforme pas monomorphisme en monomorphisme: considérer un faisceau de groupes non abélien B, un sous-faisceau abélien mais non central A et les automorphismes de A induits par un automorphisme intérieur de B.

Proposition 1.2.5. Le conoyau d'un morphisme de liens u: L → M existe. Un conoyau de u reste un conoyau par localisation. Le foncteur lien: Fagr → Lien respecte les conoyaux.

1.2.5.1 (Réf. IV, 1.3.1) Par conoyau de u on entend celui du couple $L \underset{1}{\overset{u}{\rightrightarrows}} M$ où 1 désigne le morphisme unité (1.2.1.1).

Corollaire 1.2.5.2. Soit A un faisceau de groupes. Posons M = lien(A), et soit u: L → M un morphisme de liens. Le foncteur qui, à tout faisceau de groupes X, associe

$$\{x \in \mathrm{Hom}(A,X)\ ,\ \mathrm{lien}(x) \circ u = 1\}$$

est représentable (par un faisceau de groupes!).

(Réf. IV, 1.3.5)

Corollaire 1.2.5.3. Soit L un lien. Le foncteur qui, à tout faisceau de groupes abéliens A, associe l'ensemble Hom(L, lien(A)) est représentable par un faisceau de groupes abéliens L^{ab}. Si G représente L, L^{ab} est le quotient de G par son (faisceau de) groupe des commutateurs.

(Réf. IV, 1.3.6)

Proposition 1.2.6. Soient A et B deux faisceaux de groupes. L'application $\underline{\mathrm{Hom}}(A,B) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{lien}}(A), \underline{\mathrm{lien}}(B))$, $a \rightsquigarrow \underline{\mathrm{lien}}(a)$, induit une bijection sur les sous-ensembles formes des morphismes centraux (1.2.3).

Résulte de (1.1.4).

Proposition 1.2.7. Soit L un lien. Le foncteur qui, à tout lien X, associe l'ensemble des morphismes centraux $X \to L$ est représentable par un lien abélien C_L appelé le centre de L. Le morphisme naturel

(1.2.7.1) $\qquad c_L : C_L \to L$

est injectif et central (1.2.3); si L est représenté par G, le morphisme c_L est représenté par le morphisme $C_G \to G$, où C_G est le centre de G.

Le centre de L est donc toujours représentable par un faisceau abélien unique à isomorphisme unique près (1.1.6) (Réf. IV, 1.5.3).

Corollaire 1.2.7.2. Soient L un lien et $\underline{\mathrm{Int}}(L)$ le conoyau de c_L (1.2.5). Si G représente L, le quotient $\underline{\mathrm{Int}}(G)$ de G par son centre représente $\underline{\mathrm{Int}}(L)$.

Résulte de (1.2.5).

Proposition 1.2.8. Les produits finis existent dans la catégorie des liens. Ils sont stable par localisation. Le foncteur $\underline{\mathrm{lien}}: \underline{\mathrm{Fagr}} \to \underline{\mathrm{Lien}}$ commute aux produits finis.

(Réf. IV, 1.4.1)

1.2.8.1. Si $a: X \to L$ et $b: X \to M$ sont deux morphismes de

liens, on notera

(1.2.8.2) $(a,b)\colon X \to L \times M$

le morphisme défini par la propriété universelle du produit $L \times M$. Si $a\colon L \to M$ et $a'\colon L' \to M'$ sont des morphismes de liens, on notera

(1.2.8.3) $a \times a'\colon L \times L' \to M \times N'$

le morphisme naturel.

1.2.8.4. Si L et M sont deux liens, on a un morphisme

(1.2.8.5) $\mathrm{inj}_1 = (\mathrm{id}_L, 1)$, $\mathrm{inj}_1\colon L \to L \times M$,

et un morphisme analogue $\mathrm{inj}_2\colon M \to L \times M$. On prendra garde que l'application $u \rightsquigarrow (u.\mathrm{inj}_1, u.\mathrm{inj}_2)$

(1.2.8.6) $\mathrm{Hom}(L \times M, X) \to \mathrm{Hom}(L, X) \times \mathrm{Hom}(M, X)$

n'est pas toujours injective; par suite, la propriété habituelle pour les faisceaux de groupes ne s'étend pas. On a cependant un résultat partiel.

Proposition 1.2.9. Soient $u\colon L \to X$ et $v\colon M \to X$ deux morphismes de liens. Supposons que u soit central. Il existe un unique morphisme de liens

(1.2.9.1) $u + v\colon L \times M \to X$

tel que $(u+v) \circ \mathrm{inj}_1 = u$ et $(u+v) \circ \mathrm{inj}_2 = v$. Si, de plus, v est central, il en est de même de $u + v$.

(Réf. IV, 1.4.3). Le fait signalé en (1.2.8.4) oblige à définir le centralisateur de facon contournée.

Définition 1.2.10. Soit $u: L \to M$ un morphisme de liens. On appelle centralisateur de u un représentant du foncteur qui, à tout lien X, associe l'ensemble $C_u(X) = \{x \in \mathrm{Hom}(L \times X, M), x \circ \mathrm{inj}_L = u\}$.

1.2.10.1. Un centralisateur de u est donc un couple

(1.2.10.2) $\qquad (C_u,\ c_u : L \times C_u \to M)$,

où C_u est un lien et c_u un morphisme de liens tel que, pour tout lien X, l'application

$$\mathrm{Hom}(X, C_u) \to C_u(X) , \quad x \rightsquigarrow c_u \circ (\mathrm{id}_L \times x) ,$$

soit bijective.

Proposition 1.2.11. Soit $u: L \to M$ un morphisme de liens.

(i) Il existe un centralisateur (C_u, c_u) de u. On a

(1.2.11.1) $\qquad c_u \cdot \mathrm{inj}_L = u$

et le morphisme ci-dessous est injectif (1.2.3)

(1.2.11.2) $\qquad \gamma_u : C_u \to M , \quad \gamma_u = c_u \cdot \mathrm{inj}_M$.

(ii) Soit $a: A \to B$ un morphisme de faisceaux de groupes et soit C_a un centralisateur de a (au sens des faisceaux de groupes). Soit $c_a : A \times C_a \to B$ le morphisme naturel. Le couple $(\underline{\mathrm{lien}}(C_a), \underline{\mathrm{lien}}(c_a))$ est un centralisateur de $\underline{\mathrm{lien}}(u)$.

(Réf. IV, 1.5.2)

Corollaire 1.2.12. Soient $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$ et soient respectivement (C_u, c_u), (C_v, c_v) et (C_{vu}, c_{vu}) des centralisateurs de u, v et vu. Soit

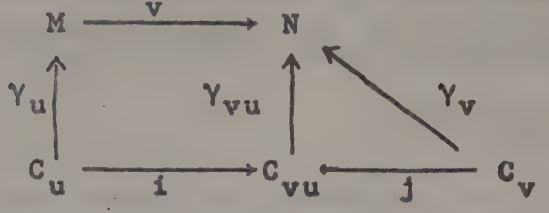
(1.2.12.1) $\qquad c_{u,v} : C_u \times C_v \to C_{vu}$

le morphisme associé, par définition de C_{vu}, au composé

$$L\times C_u\times C_v \xrightarrow{c_u\times id_{C_v}} M\times C_v \xrightarrow{c_v} N\ .$$

On a un diagramme commutatif

(1.2.12.2)



où l'on a posé

(1.2.12.3) $\quad i = c_{u,v}.inj_1 \qquad j = c_{u,v}.inj_2\ ,$ (1.2.8.5)

1.2.12.4. En particulier, pour $v = id_M$, on trouve des morphismes centraux

(1.2.12.5) $\quad C_L \xrightarrow{\ell} C_u \xleftarrow{m} C_M\ ,$

où C_u est le centralisateur de $u: L \to M$ et C_L (resp. C_M) est le centre de L (resp. M).

Corollaire 1.2.13. Sous les hypothèses de (1.2.12), si u est surjectif on a un isomorphisme $j: C_v \xrightarrow{\sim} C_{vu}$; si u est central ou surjectif, on a un isomorphisme $m: C_M \xrightarrow{\sim} C_u$.

Définition 1.2.14. Soient $u: C \to L$ et $v: C \to M$ deux morphismes de liens. On appelle produit contracté et on note $L \overset{C}{\wedge} M$ le conoyau du couple $(u,1), (1,v): C \rightrightarrows L\times M$.

Proposition 1.2.14.1. Si v est central, le produit contracté existe et il est stable par localisation. Si $a: Z \to A$ et $b: Z \to B$ sont des représentants de u et v, on a lien$(A \overset{Z}{\wedge} B) \approx L \overset{C}{\wedge} M$, (en définissant $A \overset{Z}{\wedge} B$ de manière analogue).

En effet, $L \overset{C}{\wedge} M$ s'identifie alors au conoyau (1.2.5) du morphisme $(u,-v): C \to L\times M$, où $-v$ est défini par référence au cas

des faisceaux (où l'on pose $-v(x) = v(x^{-1})$).

1.2.14.2. Sous réserve d'existence des objets écrits, on a un isomorphisme de symétrie

(1.2.14.3) $\quad L \overset{C}{\wedge} M \approx M \overset{C}{\wedge} L$

et, si, de plus, $w: C \to N$ est un morphisme de liens, on a

(1.2.14.4) $\quad (L \overset{C}{\wedge} M) \overset{C}{\wedge} N \approx L \overset{C}{\wedge} (M \overset{C}{\wedge} N)$.

Corollaire 1.2.14.5. Soit un diagramme commutatif de morphismes de liens

$$\begin{array}{ccccc} L & \xleftarrow{a} & C & \xrightarrow{b} & M \\ {\scriptstyle u}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f} & & \uparrow{\scriptstyle v} \\ L' & \xleftarrow[a']{} & C' & \xrightarrow[b']{} & M' \end{array}$$

tel que a et b soient centraux et injectifs et tel que $L' \overset{C'}{\wedge} M'$ existe. On a un isomorphisme $C_u \overset{C}{\wedge} C_v \xrightarrow{\approx} C_w$, où $w: L' \overset{C'}{\wedge} M' \to L \overset{C}{\wedge} M$ est le morphisme induit par $u \times v: L' \times M' \to L \times M$.

(Réf. IV, 1.6.4)

§2. Gerbes.

Définition 2.1.1. Soit E un site. On appelle E-gerbe un E-champ G tel que (1) pour tout $S \in Ob(E)$, tout S-morphisme est un isomorphisme (2) pour tout $S \in Ob(E)$ et tous $x, y \in Ob(G_S)$, x est localement isomorphe à y, (3) l'ensemble des $S \in Ob(E)$ tel que G_S soit non vide est un raffinement de E.

2.1.2. Un morphisme de gerbes est un morphisme de champs (I, 3.2) dont la source et le but sont des gerbes. Par ailleurs, la

troisième condition est vérifiée si G admet une section $E \to G$ (nécessairement cartésienne), auquel cas on dira que G est neutre ou triviale.

Proposition 2.1.3. Soient G une gerbe et s une section de G. Posons $A = \underline{Aut}(s)$. On a une E-équivalence

(2.1.3.1) $\quad G \xrightarrow{\approx} TORS(E,A)$, $(x/S) \rightsquigarrow \underline{Isom}_S(s(S),x)$,

et un E-quasi-inverse $P \rightsquigarrow P \overset{A}{\wedge} s(S)$ de celle-ci.

2.1.3.2 (Réf. III, 2.2.6). Toute gerbe triviale est donc équivalente à une gerbe de torseurs (II, 3.1) et l'étude des gerbes triviales a été faite au chapitre précédent. Signalons un énoncé essentiellement équivalent à ceux de (II, 4).

Proposition 2.1.4. Sous les hypothèses de (2.1.3), pour tout E-champ G, on a une équivalence de catégories

(2.1.4.1) $\quad \underline{Cart}_E(G,C) \xrightarrow{\approx} \underline{Opér}(A:C)$, (II, 4.1.1.2).

2.1.4.2 (Réf. III, 2.2.2). Pour tout morphisme de Champs $m: G \to C$, on a une section ms de C et un morphisme de faisceaux de groupes $\mu: \underline{Aut}(s) \to \underline{Aut}(ms)$ induit par m, le couple (ms,μ) est donc un A-objet à opérateurs de C, ce qui permet de décrire (2.1.4.1).

Proposition 2.1.5. Soient E un U-site et G un E-champ. Pour que G soit une E-gerbe il faut et il suffit que G^* soit une $\widetilde{E}$-gerbe. On a une équivalence $\underline{Lim}(G/E) \xrightarrow{\approx} G^*_e$, où e est l'objet final de $\widetilde{E}$.

(Réf. II, 2.1.2.1). En vertu de (I, 5.7), la donnée d'une gerbe sur E équivaut donc essentiellement à celle d'une gerbe sur

$\tilde{E}$.

2.1.6. Localisation. Si G est une E-gerbe, pour tout $S \in Ob(E)$, la catégorie $G_{/S} = G \times_E E_{/S}$ est une gerbe sur le site $E_{/S}$ (Réf. IV, 2.2.4) que l'on appellera restriction de G à S.

Définition 2.1.7. Soit C un E-champ. On appelle sous-gerbe de C une sous-catégorie G de C telle que la restriction à G de la projection $C \to E$ fasse de G une E-gerbe et telle que le foncteur d'inclusion $G \to C$ soit E-cartésien.

2.1.7.1. Pour qu'une sous-gerbe G de C soit maximale (pour l'inclusion) il faut et il suffit que, pout tout $S \in Ob(E)$, G_S soit une catégorie strictement pleine du groupoïde C_S^{is} sous-jacent à C_S (obtenu en ne retenant que les S-isomorphismes). Si s est une section de C (ou un objet de la fibre en l'objet final de E) on appelle gerbe engendrée par s l'unique sous-gerbe maximale $C(s)$ de C telle que s se factorise par $C(s)$ (Réf. III, 2.1.3.2).

2.1.7.2. Par localisation, on définit un préfaisceau d'ensembles $\underline{Ger}(C)$ sur E qui, à tout $S \in Ob(E)$, associe l'ensemble des sous-gerbes maximales du $E_{/S}$-champ $C_{/S} = C \times_E E_{/S}$. Grâce aux foncteurs image inverse, on définit un préfaisceau d'ensembles $\underline{Obis}(C)$ qui, à tout $S \in Ob(E)$, associe l'ensemble des classes à S-isomorphisme près d'objets de C_S. En associant à tout $x \in Ob(C_S)$ la sous-gerbe de $C_{/S}$ engendrée par x, on définit un morphisme de préfaisceaux d'ensembles $\gamma : \underline{Obis}(C) \to \underline{Ger}(C)$.

Proposition 2.1.8. Pour tout E-champ C, le morphisme γ fait de $\underline{Ger}(C)$ un faisceau associé à $\underline{Obis}(C)$.

(Réf. III, 2.1.4)

2.2. Lien d'une gerbe.

2.2.1. Soit G un E-champ dont les fibres sont des groupoïdes. On résume les propriétés de compatibilité des faisceaux $\underline{Aut}_S(x)$ par un morphisme de E-champs

(2.2.1.1) $\quad Aut^G : G \to FAGR(E)\ ,\ (x/S) \rightsquigarrow \underline{Aut}_S(x),$

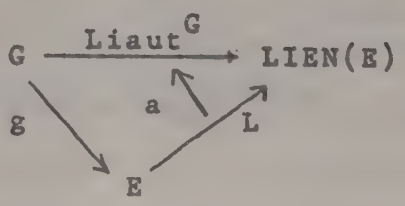
et on note

(2.2.1.2) $\quad Liaut^G : G \to LIEN(E)\ ,\ (x/S) \rightsquigarrow \underline{lien}(\underline{Aut}_S(x))\ ,$

son composé avec lien(E) (III, 1.1.1.1).

Définition 2.2.2. Soient G un E-champ de groupoïdes et L un lien sur E. Une action de L sur G est un morphisme de foncteurs a

(2.2.2.1)



où g est la projection.

Proposition 2.2.3. Soit G une E-gerbe. Le foncteur L(G) qui, à tout lien X sur E, associe l'ensemble des actions de X sur G est représentable. Pour que (L,a) soit un représentant de L(G) il faut et il suffit que a soit un isomorphisme.

2.2.3.1 (Réf. IV, 2.2.1). On appellera lien de G un représentant de L(G). C'est donc un lien L muni d'une famille d'isomorphismes de liens sur S

(2.2.3.2) $a(x)\colon L(S) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{lien}}(\underline{\mathrm{Aut}}_S(x))$, $x \in \mathrm{Ob}(G_S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$,

assujettie à certaines conditions de compatibilité. Nous dirons également que G est liée par L ou encore que (G,a) est une L-gerbe.

Proposition 2.2.4. Soient $m\colon G \to H$ un morphisme de gerbes, (L,a) le lien de G et (M,b) celui de H. Il existe un unique morphisme de liens $u\colon L \to M$ tel que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout $x \in \mathrm{Ob}(G_S)$, le morphisme $\underline{\mathrm{Aut}}_S(x) \to \underline{\mathrm{Aut}}_S(m(x))$ induit par m représente $u(S)\colon L(S) \to M(S)$.

2.2.4.1.(Réf. IV, 2.2.3). La terminologie est justifiée car les morphismes a(S) et b(S) (2.2.3.2) font de $\underline{\mathrm{Aut}}_S(x)$ et $\underline{\mathrm{Aut}}_S(m(x))$ des représentants (1.1.3) des liens L(S) et M(S). On dira que m est lié par u ou encore que m est un u-morphisme.

Proposition 2.2.5. Soient G une gerbe, L son lien et s une section de G. On a un isomorphisme canonique de liens

(2.2.5.1) $L \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{lien}}(\underline{\mathrm{Aut}}(s))$,

(autrement dit, $\underline{\mathrm{Aut}}(s)$ représente L). Si, de plus, $i\colon s \xrightarrow{\sim} t$ est un isomorphisme de sections de G, le morphisme $\underline{\mathrm{Aut}}(s) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Aut}}(t)$, $a \rightsquigarrow iai^{-1}$, représente l'identité de L. Si $m\colon G \to H$ est un morphisme de gerbes et si M lie H, le morphisme $\underline{\mathrm{Aut}}(s) \to \underline{\mathrm{Aut}}(ms)$ induit par m représente le morphisme $L \to M$ qui lie $m\colon G \to H$.

(Réf. IV, 2.2.5).

Corollaire 2.2.6. Pour qu'un lien L soit représentable il faut et il suffit qu'il existe une L-gerbe triviale.

On vient de voir que la condition est suffisante; elle est nécessaire: gerbe des A-torseurs.

Proposition 2.2.7 (Gerbes abéliennes). Soient G une gerbe, A un faisceau de groupes abéliens et L = lien(A). On a une bijection entre l'ensemble des structures de L-gerbe sur G et l'ensemble des familles d'isomorphismes de groupes

(2.2.7.1) $\quad a(x): A(S) \xrightarrow{\sim} \underline{Aut}_S(x)$, $x \in Ob(G_S)$, $S \in Ob(E)$,

telles que, pour toute flèche $m: y \to x$ de G de projection $f: T \to S$ et tout $a \in A(S)$, on ait $m.a(y)(A(f)(a)) = a(x)(a).m$ (dans $Hom_f(y,x)$).

(Réf. IV, 2.2.3.4)

2.2.7.2. Si G est une gerbe telle que, pour tout $S \in Ob(E)$ et tout $x \in Ob(G_S)$ le groupe $Aut_S(x)$ soit abélien, le lien de G est abélien donc uniquement représentable par un faisceau de groupes abéliens A (1.1.6); il existe donc une famille a comme dans (2.2.7.1). Il est clair que (A,a) est unique à isomorphisme unique près. On dira que G (ou plus correctement (G,a)) est une A-gerbe.

Proposition 2.2.8. Soit $m: G \to H$ un morphisme de gerbes lié par $u: L \to M$. Pour que m soit fidèle il faut et il suffit que u soit injectif (1.2.3). Pour que m soit couvrant (I, 4.2.1) il faut et il suffit que u soit surjectif (1.2.3). Pour que m soit pleinement fidèle il faut et il suffit que m soit un isomorphisme, auquel cas m est une équivalence.

(Réf. IV, 2.2.6)

Corollaire 2.2.9. Soient L un lien, G et H deux L-gerbes.

Tout morphisme $m: G \to H$ lié par id_L est une équivalence.

On dira que m est un L-morphisme ou encore une L-équivalence.

Proposition 2.2.10. Soient G_1 et G_2 deux gerbes. Les morphismes $L \to L_i$ qui lient les projections de $G = G_1 \times_E G_2$ font de L un produit $L_1 \times L_2$.

(Réf. IV, 2.2.8)

2.3. Les gerbes $HOM_u(P,Q)$.

Définition 2.3.1. Soient $u: L \to M$ un morphisme de liens sur E, P une L-gerbe et Q une M-gerbe. On désigne par

(2.3.1.1) $\underline{Hom}_u(P,Q)$ (resp. $Hom_u(P,Q)$)

la sous-catégorie pleine de $\underline{Cart}_E(P,Q)$ dont les objets sont les morphismes de gerbes $m: P \to Q$ liés par U (resp. l'ensemble d'objets de $\underline{Hom}_u(P,Q)$). On désigne par

(2.3.1.2) $HOM_u(P,Q)$

la sous-catégorie pleine de $CART(P,Q)$ (I. 6) dont les objets de projection $S \in Ob(E)$ sont les morphismes de gerbes $m: P_{/S} \to Q_{/S}$ liés par la restriction $u_{/S}$ de u à $E_{/S}$.

2.3.1.3. La définition de $HOM_u(P,Q)$ a un sens car $P_{/S}$ est liée par la restriction de L à S (Réf. IV, 2.2.4 (i)).

Proposition 2.3.2. $HOM_u(P,Q)$ est une sous-gerbe maximale (2.1.7.1) de $CART(P,Q)$. Soient C_u le lien de $HOM_u(P,Q)$ et $c_u: L \times C_u \to M$ le morphisme qui lie le morphisme de gerbes

(2.3.2.1) $V: P \times_E HOM_u(P,Q) \to Q$, $V(p,m) = m(p)$, (I, 6.1.3).

Le couple (C_u, c_u) est un centralisateur de u (1.2.10). On

a une équivalence

(2.3.2.2) $\underline{\mathrm{Hom}}_u(P,Q) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Lim}}(\mathrm{HOM}_u(P,Q)/E)$.

2.3.2.3 (Réf. IV, 2.3.2). La première assertion assure en particulier que si $m: P \to Q$ est un u-morphisme, le morphisme $m_{/S}: P_{/S} \to Q_{/S}$ déduit par le changement de base $E_{/S} \to E, S \in \mathrm{Ob}(E)$, est lié par la restriction de u au site $E_{/S}$.

Corollaire 2.3.3. Soient $u: L \to M$ un morphisme de liens, P une L-gerbe et Q une M-gerbe. Il existe localement un u-morphisme $P \to Q$. Pour qu'il existe un u-morphisme $P \to Q$ il faut et il suffit que la gerbe $\mathrm{HOM}_u(P,Q)$ soit triviale.

Corollaire 2.3.4. Pour que deux morphismes de gerbes $m, n: P \rightrightarrows Q$ soient liés par le même morphisme de liens il faut et il suffit qu'ils soient localement isomorphes.

Corollaire 2.3.5. Soit $m: P \to Q$ un morphisme de gerbes. Le faisceau $\mathrm{Aut}(m)$ (dans le champ $\mathrm{CART}(P,Q)$) représente le centralisateur du morphisme $u: L \to M$ qui lie m.

Corollaire 2.3.6. Soient L un lien, P et Q deux L-gerbes. La gerbe $\mathrm{HOM}_L(P,Q)$ (c'est à dire $\mathrm{HOM}_u(P,Q)$ où $u = \mathrm{id}_L$) est liée par le centre de L.

Corollaire 2.3.7. Soient P et Q deux gerbes de liens L et M. On a une équivalence de catégories $\underline{\mathrm{Lim}}(Q/E) \to \underline{\mathrm{Hom}}_1(P,Q)$, $q \rightsquigarrow q\pi$, où $1: L \to M$ désigne le morphisme unité (1.2.1.1) et $\pi: P \to E$ la projection.

(Réf. IV, 2.3.16)

Proposition 2.3.8. Soient $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$ des morphismes de liens,

$(C_u, c_u), (C_v, c_v)$ et (C_{vu}, c_{vu}) leurs centralisateurs et P, Q, R des gerbes liées par L, M, N. On a un morphisme de gerbes

(2.3.8.1) $\mathrm{HOM}_u(P,Q) \times_E \mathrm{HOM}_v(Q,R) \to \mathrm{HOM}_{vu}(P,R)$, $(m,n) \rightsquigarrow nm$,

lié par le morphisme $c_{u,v}: C_u \times C_v \to C_{vu}$ (1.2.12.1). De plus, pour tout u-morphisme $m: P \to Q$, le morphisme de gerbes

(2.3.8.2) $\mathrm{HOM}_v(Q,R) \to \mathrm{HOM}_{vu}(P,R)$, $n \rightsquigarrow nm$,

est lié par $j: C_v \to C_{vu}$ (1.2.12.2). Enfin, pour tout v-morphisme $n: Q \to R$ le morphisme de gerbes

(2.3.8.3) $\mathrm{HOM}_u(P,R) \to \mathrm{HOM}_{vu}(P,R)$, $m \rightsquigarrow nm$,

est lié par $i: C_u \to C_{vu}$ (1.2.12.2)

(Réf. IV, 2.3.12)

Proposition 2.3.9. Soit $u: L \to M$ un morphisme de liens tel que le centralisateur de u soit le centre de M (1.2.12.5).

(i) Pour toute L-gerbe P il existe une M-gerbe Q et un u-morphisme $P \to Q$.

(ii) Soient $m: P \to Q$ un morphisme de gerbes lié par u et Q' une M-gerbe. Pour que Q' soit M-équivalente à Q il faut et il suffit qu'il existe un u-morphisme $P \to Q'$. De plus, on a une C_M-équivalence de C_M-gerbes

(2.3.9.1) $\mathrm{HOM}_M(Q,Q') \to \mathrm{HOM}_u(P,Q')$, $n \rightsquigarrow nm$,

et une équivalence de catégories

(2.3.9.2) $\underline{\mathrm{Hom}}_M(Q,Q') \to \underline{\mathrm{Hom}}_u(P,Q')$, $n \rightsquigarrow nm$.

2.3.9.3 (Réf. IV, 2.3.15). On notera que l'hypothèse est vérifiée si u est surjectif ou si M est abélien. On notera

que si l'on ne suppose plus que $C_M \to C_u$ est un isomorphisme, le morphisme (2.3.9.1) n'est pas une équivalence et il faut alors s'attendre que (i) ne soit plus vraie, ce que montrent effectivement des exemples.

Proposition 2.3.10. Soient P et Q deux gerbes, L et M leurs liens, $s: L \times X \to M$ un morphisme de liens. Posons $u = s \circ inj_1$, $u: L \to M$, et soit $x: X \to C_u$ le morphisme défini par s, où C_u est le centralisateur de u (1.2.10). Pour toute X-gerbe G, on a une E-équivalence de gerbes

(2.3.10.1) $\quad HOM_X(G, HOM_u(P,Q)) \to HOM_s(P \times_E G, Q)$

liée par l'isomorphisme naturel $C_x \xrightarrow{\sim} C_s$.
(Réf. IV, 2.3.7)

Corollaire 2.3.11. Sous les hypothèses de (2.3.10), pour tout s-morphisme $f: G \times_E P \to Q$, on a un morphisme de gerbes

(2.3.11.1) $\quad \varphi: G \to HOM_u(P,Q)$, $\varphi(g)(p) = f(g,p)$,

lié par $x: X \to C_u$.
(Réf. IV, 2.3.9)

2.4. Le produit contracté $P \overset{C}{\wedge} Q$ de deux gerbes.

Proposition 2.4.1. Soit $(u,v): C \to L \times M$ un morphisme de liens tel que le produit contracté

(2.4.1.1) $\quad \pi: L \times M \to L \overset{C}{\wedge} M$, (1.2.14),

existe. Soient encore P et Q deux gerbes de liens L et M.

(i) Il existe une gerbe $P \overset{C}{\wedge} Q$ de lien $L \overset{C}{\wedge} M$ et un π-morphisme de gerbes

(2.4.1.2) $\quad \omega: P \times_E Q \to P \overset{C}{\wedge} Q.$

(ii) Pour tout morphisme de liens $x: L \overset{C}{\wedge} M \to N$ et toute N-gerbe R, on a une C_x-équivalence de gerbes

(2.4.1.3) $\quad HOM_x(P \overset{C}{\wedge} Q, R) \to HOM_{x\pi}(P \times_E Q, R)$, $m \rightsquigarrow m\omega$

(où $C_x = C_{x\pi}$ est le centralisateur de x) et une équivalence de catégories

(2.4.1.4) $\quad \underline{Hom}_x(P \overset{C}{\wedge} Q, R) \to \underline{Hom}_{x\pi}(P \times_E Q, R)$, $m \rightsquigarrow m\omega$.

(iii) Pour toute E-gerbe R on a une équivalence de catégories

(2.4.1.5) $\quad \underline{Cart}_E(P \overset{C}{\wedge} Q, R) \to \underline{C}(R)$, $m \rightsquigarrow m\omega$

où $\underline{C}(R)$ est la sous-catégorie pleine de $\underline{Cart}_E(P \times_E Q, R)$ dont les objets sont les morphismes de gerbes $M: P \times_E Q \to R$ liés par un morphisme $w: L \times M \to N$ vérifiant $w.(u,1) = w.(1,v)$, (c'est à dire $w.(u,-v) = 1$ si v est central).

(Réf. IV, 2.4.1). On dira parfois que $P \overset{C}{\wedge} Q$ est <u>le produit contracté</u> de P et Q relativement aux opérations de C. On rappelle que $L \overset{C}{\wedge} M$ existe si u ou v est central.

<u>Corollaire 2.4.2</u>. Si P et Q sont neutres il en est de même de $P \overset{C}{\wedge} Q$.

Cf. (2.4.1.2)!

<u>Corollaire 2.4.3</u>. Sous les hypothèses de (2.4.1), on a une équivalence

(2.4.3.1) $\quad P \overset{C}{\wedge} Q \xrightarrow{\approx} Q \overset{C}{\wedge} P$

liée par l'isomorphisme $L \overset{C}{\wedge} M \to M \overset{C}{\wedge} L$ (1.2.14.3). Si, de plus, $w: C \to N$ est un morphisme central et R une N-gerbe, on a une équivalence

(2.4.3.2) $\quad (P \overset{C}{\wedge} Q) \overset{C}{\wedge} R \approx P \overset{C}{\wedge} (Q \overset{C}{\wedge} R)$

liée par l'isomorphisme d'associativité (1.2.14.4).

(Réf. IV, 2.4.2)

Exemple 2.4.4. Soit $u: C \to L$ un morphisme de liens central. Le produit contracté $C \overset{C}{\wedge} L$ défini par le couple $(id_C, u): C \to C \times L$ est ici le conoyau de $(id_C, -u): C \to C \times L$ (1.2.14.1) et il s'identifie donc à L grâce à $u + id_L: C \times L \to L$ (1.2.9.1). Soient X une C-gerbe et P une L-gerbe. On désignera par $X \overset{C}{\wedge} P$ la L-gerbe caractérisée à L-équivalence près par l'existence d'un $(u+id_L)$-morphisme $X \times_E P \to X \overset{C}{\wedge} P$. Si, de plus, $v: L \to M$ est un morphisme central et si Q est une M-gerbe, on a une M-équivalence

(2.4.4.1) $\quad (X \overset{C}{\wedge} P) \overset{L}{\wedge} Q \xrightarrow{\approx} X \overset{C}{\wedge} (P \overset{L}{\wedge} Q)$ (Réf. IV, 2.4.3 (1)).

2.4.4.2. En particulier, si C est un lien abélien et si X et Y sont deux C-gerbes, le produit contracté $X \overset{C}{\wedge} Y$ sera caracterisé par l'existence d'un morphisme $X \times_E Y \to X \overset{C}{\wedge} Y$ lié par $id_C + id_C: C \times C \to C$. Si, de plus, $u: C \to L$ est un morphisme central et si P est une L-gerbe, on aura une L-équivalence

(2.4.4.2) $\quad (X \overset{C}{\wedge} Y) \overset{C}{\wedge} P \xrightarrow{\approx} X \overset{C}{\wedge} (Y \overset{C}{\wedge} P)$.

Proposition 2.4.5. Soient L un lien, C son centre, P et Q deux L-gerbes. On a une L-équivalence $P \overset{C}{\wedge} HOM_L(P,Q) \to Q$.

(Réf. IV, 2.4.4). On rappelle que $HOM_L(P,Q)$ est une C-gerbe.

Proposition 2.4.6. Soient $u: C \to L$ un morphisme de liens central, X une C-gerbe et P une L-gerbe. Il existe des L-équivalences

(2.4.6.1) $\quad X \overset{C}{\wedge} HOM_u(X,P) \xrightarrow{\approx} P$

(2.4.6.2) $\quad P \xrightarrow{\approx} HOM_u(X, P \overset{C}{\wedge} X).$

Soient encore C_L le centre de L et $x: C \to C_L$ le morphisme induit par u. Il existe un x-morphisme

(2.4.6.3) $\quad X \to HOM_L(P, P \overset{C}{\wedge} X).$

(Réf. IV, 2.4.5)

Corollaire 2.4.7. Sous les hypothèses de (2.4.6), pour que P soit triviale il faut et il suffit qu'il existe un u-morphisme $X \to P \overset{C}{\wedge} X$.

Résulte de (2.4.6.2) et (2.3.3).

Corollaire 2.4.8. Sous les hypothèses de (2.4.6), si X est triviale il existe une L-équivalence $P \to P \overset{C}{\wedge} X$. Si C est le centre de L la réciproque est vraie.

Résulte de (2.4.6.3) et (2.3.3).

Proposition 2.4.9. Soient $u: L \to M$ un morphisme de liens, P une L-gerbe, Q une M-gerbe et $(C_u, c_u: L \times C_u \to M)$ le centralisateur de u (1.2.10).

(i) Soient $a: A \to L$ un morphisme central et X une A-gerbe. On a une C_u-équivalence

(2.4.9.1) $\quad X \overset{A}{\wedge} HOM_u(P \overset{A}{\wedge} X, Q) \to HOM_u(P, Q)$

(ii) Soient $b: B \to M$ un morphisme central et Y une B-gerbe. On a une C_u-équivalence

(2.4.9.2) $\quad HOM_u(P, Q) \overset{B}{\wedge} Y \to HOM_u(P, Q \overset{B}{\wedge} Y).$

(Réf. IV, 2.4.6). Le produit contracté $X \overset{A}{\wedge} HOM_u(*)$ de (2.4.9.1) est défini grâce au morphisme central $A \to C_u$ induit

par $a: A \to L$ (1.2.12.5). Le produit contracté $HOM_u(P,Q) \overset{B}{\wedge} Y$ est défini grâce au morphisme central $B \to C_u$ induit par $b: B \to M$, (1.2.12.5).

Corollaire 2.4.10. Sous les hypothèses de (2.4.9.1), si A est abélien, on a une C_u-équivalence

$$HOM_u(P \overset{A}{\wedge} X, Q) \longrightarrow X^o \overset{A}{\wedge} HOM_u(P,Q) , \tag{2.4.10.1}$$

où X^o est la A-gerbe obtenue en composant l'action de A sur X (2.2.3.1) avec l'automorphisme $A \xrightarrow{\sim} A$, $x \longmapsto x^{-1}$.

(Réf. IV, 3.2.2.3)

2.5. La gerbe des relèvements d'une section.

2.5.1. Soient E une catégorie, F et G deux E-catégories fibrées, $m: F \to G$ un E-foncteur cartésien et $s: E \to G$ une section cartésienne de G. On définit une E-catégorie $K(s)$ en prenant pour objets de projection $S \in Ob(E)$ les éléments de

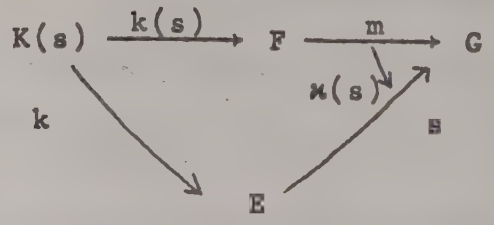
$$Ob(K(s)_S) = \{(a,\alpha),\ a \in Ob(F_S),\ \alpha \in Isom_S(m(a), s(S))\}, \tag{2.5.1.1}$$

pour morphismes de projection $f: T \to S$, $f \in Fl(E)$, de source (b,β) et de but (a,α) les éléments de

$$\{\varphi \in Hom(b,a),\ \pi(\varphi) = f,\ s(f)\beta = \alpha m(\varphi)\}, \tag{2.5.1.2}$$

où π est la projection de F, et en composant les morphismes grâce à la loi de F. On vérifie aisément que l'on a un diagramme

(2.5.1.3)



où k est la projection et où $k(s)$ est un E-foncteur cartésien

fidèle et conservatif (I, 2.3.7)

(2.5.1.4) $\quad k(s)(a,\alpha) = a, \quad (a,\alpha) \in Ob(K(s)_S)$

et où $\kappa(s)$: m.k(s) → s.k, est un E-isomorphisme

(2.5.1.5) $\quad \kappa(s)(a,\alpha) = \alpha, \quad (a,\alpha) \in Ob(K(s)_S).$

Proposition 2.5.2. Soient E un site, m: F → G un morphisme de E-champs et s une section cartésienne de G. La catégorie K(s) est un E-champ et l'on a un isomorphisme

(2.5.2.1) $\quad \underline{Lim}(K(s)/E) \xrightarrow{\sim} K_s(E)$

où $K_s(E)$ est la catégorie dont les objets sont les couples (a,α) où a est une section cartésienne de F et α: ma $\xrightarrow{\sim}$ s un isomorphisme de sections cartésiennes de G. De plus, si m: F → G est couvrant (I, 4.2.1) et conservatif (I, 2.3.7), K(s) est une E-gerbe.

(Réf. IV, 2.5.2, IV, 2.5.4). On dira que K(s) est la gerbe de relèvements de s relativement à m: F → G.

Proposition 2.5.3. Soient m: F → G un morphisme de champs couvrant et conservatif, s ∈ Ob(Lim(G/E)) et L(s) le lien de K(s). On a un morphisme de faisceaux de groupes

(2.5.3.1) $\quad e: \underline{Aut}(s) \to \underline{Aut}(L(s))$

(qui fait donc opérer Aut(s) sur le lien L(s) (II, 4.1)). Soit encore s' ∈ Ob(Lim(G/E)), localement isomorphe à s. Si l'on note P le Aut(s)-torseur Isom(s,s'), on a un isomorphisme canonique de liens

(2.5.3.2) $\quad {}^{P}L(s) \xrightarrow{\sim} L(s')$

où ${}^{P}L(s)$ est obtenu en tordant $L(s)$ par P grâce à e (II, 4.1.2.4).

2.5.3.3. La preuve est essentiellement triviale (Réf. IV, 2.5.5). On note qu'un isomorphisme $i: s \xrightarrow{\sim} t$ induit un isomorphisme de gerbes

(2.5.3.4) $K(i): K(s) \longrightarrow K(t)$, $K(i)(a,\alpha) = (a, i(S)\alpha)$,

d'où un isomorphisme de liens

(2.5.3.5) $L(i): L(s) \xrightarrow{\sim} L(t)$

et on localise. On notera que (2.5.3.2) s'écrit également

(2.5.3.6) ${}^{P}L(s) \approx L({}^{P}s)$.

2.5.3.7. On notera que si $1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1$ est une suite exacte de faisceaux de groupes, les automorphismes intérieurs de B induisent des opérations de C sur $\underline{lien}(A)$ et $\underline{lien}(B)$. Par torsion, on a donc, pour tout C-torseur P, un morphisme de liens

(2.5.3.8) ${}^{P}\underline{lien}(a): {}^{P}\underline{lien}({}^{P}A) \to \underline{lien}(B)$

car $\underline{lien}(a)$ est compatible avec les opérations de C et C opère trivialement sur $\underline{lien}(B)$.

Proposition 2.5.4. Soit $1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1$ une suite exacte de faisceaux de groupes (II, 5.3.0) et soit P un C-torseur. La catégorie $K(P)$ dont les objets de projection $S \in Ob(E)$ sont les couples (Q,q), où Q est un B-torseur sur S et $q: Q \overset{B}{\wedge} C \xrightarrow{\sim} P$ un C-isomorphisme, est une gerbe dont le lien est ${}^{P}\underline{lien}(A)$ (resp. $\underline{lien}({}^{P}A)$ si A est abélien) (resp. $\underline{lien}(A)$ si C opère trivialement sur $\underline{lien}(A)$, par exemple si A est central). Pour qu'il existe un relèvement de P à B (II, 5.2.1) il faut et il suffit que la gerbe $K(P)$ soit triviale.

2.5.4.1 (Réf. IV, 2.5.8). On dira que $K(P)$ est *la gerbe des relèvements de* P *à* B; on la décrit plus précisément comme la gerbe des relèvements de la section définie par P relativement au foncteur extension du groupe structural

$$TORS(E,B) \to TORS(E,C),\ Q \rightsquigarrow Q \overset{B}{\wedge} C, \quad (II, 3.4.1).$$

On prouve également que le foncteur

(2.5.4.2) $\qquad K(P) \to TORS(E,B),\ (Q,q) \rightsquigarrow Q$,

est lié par ${}^{P}\underline{\text{lien}}(a)$ (2.3.5.8) (Réf. IV, 2.5.5.4).

Remarque 2.5.5. Si A est abélien, on trouve ainsi d'après (3.3.3) ci-dessous une classe $d(P) \in H^2({}^{P}A)$ dont la nullité est nécessaire et suffisante pour que l'on puisse "restreindre à B le groupe structural de P". Grâce aux calculs de (3.3.5.3), on vérifie que $d(P)$ est la classe décrite dans [F], [K] et [3] en topologie et dans [CC] en cohomologie des groupes.

§3. Cohomologie de degré 2.

Les numéros 3, 4 et 5 sont consacrés aux théorèmes qui permettent d'appliquer à l'étude des gerbes les ressources de l'algèbre homologique commutative.

3.1. L'ensemble $H^2(L)$ attaché à un lien L.

Définition 3.1.1. Soient E un U-site et L un lien sur E (1.1.2). On désignera par $H^2(E,L)$ ou $H^2(L)$ l'ensemble des classes à L-équivalence près (2.2.9) de L-gerbes (2.2.3.1). On dira qu'une classe est *neutre* si l'un (donc chacun) de ses représentants admet une section; on désignera par $H^2(E,L)'$ ou

$H^2(L)'$ la partie de $H^2(E,L)$ dont les éléments sont les classes neutres. Si $H^2(E,L)$ est non vide on dira que L est réalisable.

Définition 3.1.2. Soient E un U-site et A un faisceau de groupes sur E. On pose

(3.1.2.1) $\quad H^2(A) = H^2(L)\ ,\quad H^2(A)' = H^2(L)'$

où $L = \underline{\text{lien}}(A)$ désigne le lien représenté par A (1.1.3.1). On appelle classe unité celle de la gerbe des A-torseurs.

3.1.2.2. La gerbe des A-torseurs admet une section définie par le A-torseur trivial A_d dont le faisceau des automorphismes s'identifie à A grâce aux translations à gauche; elle est donc liée par A (2.2.5). On notera que la classe unité est neutre.

Remarque 3.1.3. Si $u: L \to M$ est un morphisme de liens tel que L soit réalisable (par exemple le lien unité) et tel que M ne le soit pas, il n'existe pas d'application $H^2(L) \to H^2(M)$, donc $H^2(L)$ n'est pas fonctoriel en L. Cependant la proposition (3.4.4) donne une bonne prise sur la relation $u^{(2)}$ que l'on va définir.

Définition 3.1.4 ("Fonctorialité"). Soit $u: L \to M$ un morphisme de liens sur E. Soient $p \in H^2(L)$ et $q \in H^2(M)$. On notera

(3.1.4.1) $\quad p \overset{u}{\longrightarrow} q$

la relation << il existe des représentants P et Q de p et q et un u-morphisme $m: P \to Q$>>.

3.1.4.2. Cette propriété est évidemment indépendante des représentants choisis. On désignera par

(3.1.4.3) $\quad H^2(L) \xrightarrow{u^{(2)}} H^2(M)$

la correspondance ainsi définie. Si A et B sont deux faisceaux de groupes tels que L = lien(A), M = lien(B), on notera

(3.1.4.4) $\quad H^2(A) \xrightarrow{u^{(2)}} H^2(B)$

la correspondance (3.1.4.3). Si, de plus, a: A → B est un morphisme de faisceaux de groupes tel que u = lien(a), on écrira

(3.1.4.5) $\quad p \xrightarrow{a} q$ et $H^2(A) \xrightarrow{a^{(2)}} H^2(B)$

au lieu de (3.1.4.1, 3). Dans ce cas, on a

(3.1.4.6) $\quad \alpha \xrightarrow{a} \beta$

où α et β sont les classes unités de $H^2(A)$ et $H^2(B)$; en effet le foncteur extension du groupe structural (II, 3.4.1) est lié par u = lien(a) (2.2.5).

3.1.4.7. On notera que si p est neutre et si $p \xrightarrow{u} q$ alors q est neutre. De plus, si v: M → N est un morphisme de liens, si $p \xrightarrow{u} q$ et si $q \xrightarrow{v} r$ alors $p \xrightarrow{vu} r$. Enfin, si u est le morphisme identique de L $p \xrightarrow{u} q$ équivaut à p = q.

Remarque 3.1.4.8. Soit $\underline{1}$ le lien unité (1.2.1). On a

$$H^2(\underline{1}) = H^2(\underline{1})' = \{e\}$$

où e est la classe de la catégorie base E, liée par $\underline{1}$ de manière évidente. De plus, si L est un lien et si 1: $\underline{1}$ → L est le morphisme unité, la relation $e \xrightarrow{1} p$ équivaut à $p \in H^2(L)'$ (Réf. IV, 3.1.4.3).

Proposition 3.1.5. Soit u: L → M un morphisme de liens tel que le centralisateur de u soit le centre de M (1.2.12.5). La

relation (3.1.4.1) est fonctionnelle en p. De plus, l'application ainsi définie, notée

(3.1.5.2) $\quad u^{(2)}: H^2(L) \to H^2(M)$

applique $H^2(L)'$ dans $H^2(M)'$.

3.1.5.3. Résulte de (2.3.9). On notera que l'hypothèse est vérifiée si u est surjectif (1.2.3) ou si M est abélien (1.1.6).

3.1.5.4. Si $u: L \xrightarrow{\sim} M$ est un isomorphisme, l'application $u^{(2)}$ est l'isomorphisme défini par transport de structure. En effet, si P est une L-gerbe et si $a(x): L(S) \xrightarrow{\sim} \underline{lien}(\underline{Aut}_S(x))$, $S \in Ob(E)$, $x \in Ob(P_S)$ est la famille d'isomorphismes qui la lie à L (2.2.3.2), la famille $a(x).u(S)^{-1}: M(S) \longrightarrow \underline{lien}(\underline{Aut}_S(x))$ fait de P une M-gerbe ${}^uP$. Il est clair que ${}^uP$ est déduite de P par transport de structure et, par ailleurs, l'identité de P est un u-morphisme, d'où la conclusion.

Proposition 3.1.6. Soient L_1 et L_2 deux liens. Les projections du produit $p_i: L_1 \times L_2 \to L_i$ sont surjectives (1.2.8) et l'application

(3.1.6.1) $\quad H^2(L_1 \times L_2) \xrightarrow{\sim} H^2(L_1) \times H^2(L_2)$

dont les composantes sont les $p_i^{(2)}$ est bijective et induit une bijection $H^2(L_1 \times L_2)' \xrightarrow{\sim} H^2(L_1)' \times H^2(L_2)'$.

(Réf. IV, 3.1.9)

Proposition 3.1.7. Soit $u: L \to M$ un morphisme de liens tel que M soit abélien. La relation $u^{(2)}$ est fonctionnelle et si P est une L-gerbe l'image de la classe p de P par l'application

$u^{(2)}$ est la classe du produit contracté $P \overset{L}{\wedge} T$ de (2.4.4), où T est une M-gerbe triviale.

(Réf. IV, 3.1.8)

Proposition 3.1.8. Soient L un lien, Z son centre et $v: Z \to Z'$ un monomorphisme de liens abéliens. La relation $u^{(2)}$ associée au morphisme naturel

(3.1.8.1) $\qquad u: L \to L' , \quad L' = L \overset{Z}{\wedge} Z'$

est fonctionnelle. Si P est une L-gerbe et si $p \in H^2(L)$ est sa classe, l'image de p par l'application

(3.1.8.2) $\qquad u^{(2)}: H^2(L) \to H^2(L')$

est la classe de $P \overset{Z}{\wedge} T$, où T est une Z'-gerbe triviale.

(Réf. IV, 3.1.7). Le morphisme u est le composé

(3.1.8.3) $\qquad L \xrightarrow{\text{inj}_1} L \times Z' \xrightarrow{\pi} L \overset{Z}{\wedge} Z'$

où π est la projection (1.2.8.5) (1.2.14).

3.2. Description de l'ensemble $H^2(L)'$ des classes neutres.

Proposition 3.2.1. Soit L un lien. La E-catégorie $REP(L)$ dont les objets de projection $S \in Ob(E)$ sont les représentants (1.1.3) de la restriction $L(S)$ de L à S est une E-gerbe liée par le quotient $\underline{Int}(L)$ de L par son centre (1.2.7.2). En particulier, $\underline{Int}(L)$ est réalisable.

3.2.1.1 (Réf. IV, 3.2.2). On dira que $REP(L)$ est la gerbe des représentants de L. On peut la décrire plus précisement comme la gerbe des relèvement de la section L du champ des liens relativement au foncteur $\underline{lien}(E)$ (1.1.1.1). Un objet de $REP(L)_S$, $S \in Ob(E)$ est donc un couple (A,u), où A est un

faisceau de groupes sur S et $u: \underline{lien}(A) \xrightarrow{\sim} L(S)$ un isomorphisme de liens sur S. D'après (1.1.4.2), on a un isomorphisme de faisceaux de groupes

(3.2.1.2) $\qquad \underline{Int}(A) \xrightarrow{\sim} \underline{Aut}(A,u),$

d'où le calcul du lien de REP(L).

Proposition 3.2.2. Soit F une L-gerbe. On a un morphisme de gerbes lié par la projection $\lambda: L \to \underline{Int}(L)$

(3.2.2.1) $\qquad F \to REP(L)\ ,\ (x/S) \rightsquigarrow (\underline{Aut}_S(x),\ a(x)^{-1})\ ,$

où $a(x): L(S) \to \underline{lien}(\underline{Aut}_S(x))$ est la famille d'isomorphismes de liens qui décrit l'action de L sur F (2.2.3.2).

(Réf. IV, 3.2.2)

Proposition 3.2.3. Soient L un lien et $\lambda: L \to \underline{Int}(L)$ la projection. On a

$$(\underline{Int}(L) \text{ est représentable}) \Leftarrow (L \text{ est représentable}) \Leftrightarrow (H^2(L)' \neq \emptyset) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (r_L \in H^2(Int(L)'))$$

où r_L est la classe de la gerbe des représentants de L. De plus l'image de l'application

$$\lambda^{(2)}: H^2(L) \to H^2(\underline{Int}(L))$$

est contenue dans $\{r_L\}$.

Résume ce qui précède.

Proposition 3.2.3. Soient L un lien et Rep(L) la catégorie des représentants de L. On a une équivalence de catégories

(3.2.3.1) $\qquad Rep(L) \xrightarrow{\approx} \mathcal{B}(L)\ ,$

où la seconde est la catégorie dont les objets sont les couples (G,s), où G est une L-gerbe et où $s \in Ob(\underline{Lim}(G/E))$, les morphismes $(G,s) \to (G',s')$ étant les classes à isomorphisme près L-morphismes $m: G \to G'$ tels que $ms = s'$.

(Réf. IV, 3.2.6 et 5.2.5). On définit (3.2.3.1) en associant à tout représentant (A,u) de L la gerbe des A-torseurs munie de la section définie par le torseur trivial A_d.

Corollaire 3.2.4. Le foncteur (3.2.3.1) définit une application surjective

$$(3.2.4.1) \qquad \sigma: Cl(\underline{Rep}(L)) \to H^2(L)'$$

où $Cl(Rep(L))$ est l'ensemble des classes à isomorphisme près de représentants de L. Pour que les classes de deux représentants (A,u) et (B,v) de L aient même image par σ il faut et il suffit qu'il existe un A-torseur P tel que $(B,v) \approx {}^P(A,u)$.

3.2.4.2 (Réf. IV, 3.2.6). D'après (Réf. IV, 3.2.5), si (A,u) est un représentant de L et si P est un A-torseur, le représentant ${}^P(A,u)$ de L obtenu en tordant (A,u) par P n'est autre que $(\underline{ad}(P),v)$ où

$$(3.2.4.2) \qquad v: lien(A) \xrightarrow{\sim} lien(ad(P))$$

est l'isomorphisme (1.1.5.2). D'après (Réf. IV, 3.2.5), v est également le morphisme qui lie le foncteur torsion

$$\Theta_P: TORS(E,A) \xrightarrow{\approx} TORS(E,ad(P)), \quad (II, 4.2.5.1).$$

Corollaire 3.2.5. Soient A un faisceau de groupe et $\underline{Int}(A)$ le quotient de A par son centre. On a une suite exacte d'ensembles pointés

(3.2.5.1) $\quad H^1(A) \to H^1(\underline{\mathrm{Int}}(A)) \to H^2(A)' \to 1.$

C'est une conséquence triviale de (3.2.4).

3.3. Cohomologie abélienne de degré 2.

D'après (2.2.7), si A est un faisceau de groupes abéliens la notion de L-gerbe, L = lien(A), peut se définir sans utiliser celle de lien; on dit A-gerbe.

Proposition 3.3.1. Soit A un faisceau de groupes abéliens et soit L = lien(A). L'ensemble $H^2(A) = H^2(L)$ (3.1.2.1) est muni d'une loi de groupe abélien (notée additivement) dont l'élément neutre est la classe unité. De plus, si P et Q sont deux A-gerbes et si p et q sont leurs classes dans $H^2(A)$, on a ce qui suit

(i) p+q est la classe du produit contracté $P \overset{L}{\wedge} Q$ (2.4.4.2),

(ii) q-p est la classe de $\mathrm{HOM}_L(P,Q)$ (2.3.6),

(iii) -p est la classe de l'opposée de P et aussi celle de $\mathrm{HOM}_L(P,\mathrm{TORS}(E,A))$.

De plus, si a: A → B est un morphisme de faisceaux de groupes abéliens, l'application $a^{(2)}: H^2(A) \to H^2(B)$ (3.1.7) est un morphisme de groupes.

3.3.1.1 (Réf. IV, 3.3.2). L'opposée de P désigne la gerbe déduite de P par transport de structure (3.1.5.4) grâce à s: $A \xrightarrow{\sim} A$, s(a) = -a.

Proposition 3.3.2. Soit

(3.3.2.1) $\quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$

une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens. On définit

un morphisme de groupes abéliens $d: H^1(C) \to H^2(A)$ en associant à tout C-torseur P la gerbe K(P) des relèvements de P relativement à $v: B \to C$ (2.5.5).

(Réf. IV, 3.4.1)

Théorème 3.3.3. Il existe un unique isomorphisme de foncteurs

(3.3.3.1) $\qquad i^2(A): H^2_{\cdot}(A) \xrightarrow{\sim} H^2(A)$, $A \in Ob(\tilde{E}\text{-ab})$, (II, 3.5.2),

tel que, pour toute suite exacte $0 \to A \to B \to C \to 0$ de $\tilde{E}$-ab le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1_{\cdot}(C) & \xrightarrow{d.} & H^2_{\cdot}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle i^1(C)} & & \downarrow{\scriptstyle i^2(A)} \\ H^1(C) & \xrightarrow[d]{} & H^2(A) \end{array} \qquad \text{(II, 3.5.5.1)}$$

soit commutatif.

3.3.3.2 (Réf. IV, 3.4.2). D'après (T Prop. 2.2.1), ce théorème signifie que les morphismes d de (3.3.2) et de (II, 5.4.3.1) font de (H^0, H^1, H^2) un δ-foncteur exact et effaçable.

3.3.3.3. Pour calculer $i^2(A)$, on note que si

(3.3.3.4) $\qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} D \longrightarrow 0$

est une suite exacte de $\tilde{E}$-ab, on a un morphisme canonique

(3.3.3.5) $\qquad \chi: H^0(D) \to H^2_{\cdot}(A)$

obtenu en choisissant un morphisme de (3.3.3.4) dans une résolution injective de A. D'après (M Chap. V, 7.1), χ est l'opposé du composé des opérateurs cobords $H^0(D) \to H^1_{\cdot}(B/A) \to H^2_{\cdot}(A)$, d'où l'on déduit, par (II, 3.5.5.1) et (3.3.3):

Proposition 3.3.4. Pour toute suite exacte

$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} D \longrightarrow 0$ de $\widetilde{E}$-ab et tout $s \in H^0(D)$, la classe $i^{(2)}(\chi(s))$ (3.3.3.5) est celle de la gerbe Δ dont les objets de projection $S \in Ob(E)$ sont les (P,p), où P est un B-torseur et $p: P \to C$ un B-morphisme tel que le composé wp ait pour image s, la structure de A-gerbe (2.2.7.2) étant définie par les isomorphismes

(3.3.4.1) $\quad j: A(S) \xrightarrow{\sim} Aut_S(P,p)$, $j(a)(\pi) = \pi.u(-a)$, $\pi \in P$,

où $(P,p) \in Ob(\Delta_S)$.

3.3.5.1. Soit $\underline{S} = (S_i \to S)$ une famille couvrante de E. Supposons que S soit objet final de E (sinon passer au site $E_{/S}$). On a des morphismes fonctoriels en $A \in Ob(\widetilde{E}\text{-ab})$

(3.3.5.2) $\quad H^2(\underline{S},A) \xrightarrow{\alpha} \overset{\vee}{H}{}^2(E,A) \xrightarrow{\beta} H^2(E,A)$, (SGAA V, §5.2.1).

Proposition 3.3.5.3. L'image du composé $\beta\alpha$ est l'ensemble des classes des A-gerbes G telles qu'il existe une famille $x_i \in Ob(G_{S_i})$ et une donnée de recollement sur les x_i (D 9.19). Inversement, soient G une A-gerbe, c un clivage de G (D 1.5), $x_i \in Ob(G_{S_i})$ une famille et

(3.3.5.4) $\quad u_{ij}: x^i{}_j \xrightarrow{\sim} x_i{}^j$

une donnée de recollement sur les x_i relativement à $\underline{S}$.

(i) La cochaine (c_{ijk}) de (3.3.5.8) est un cocycle et l'image par $\beta\alpha$ de la classe $c \in H^2(\underline{S},A)$ de celui-ci est la classe de G.

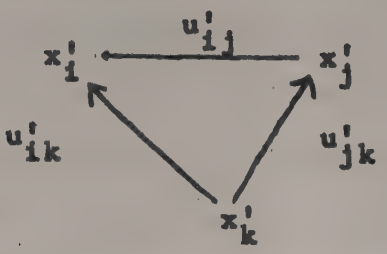
(ii) Pour que $(c_{ijk}) = 0$, il faut et il suffit que u_{ij} soit une donnée de descente (D 9.19).

(iii) Pour que $c = 0$ il faut et il suffit qu'il existe

$x \in Ob(G_S)$ tel que, pour tout i, l'image inverse de x par $S_i \to S$ soit S_i-isomorphe à x_i.

3.3.5.5 (Réf. IV, 3.5.1, 3.5.2). Par définition d'une donnée de recollement, u_{ij} est un S_{ij}-isomorphisme où $x^i{}_j$ (resp. $x_i{}^j$) est l'image inverse de x_j (resp. x_i) par la projection $S_{ij} \to S_j$ (resp. $S_{ij} \to S_i$) de $S_{ij} = S_i \times_S S_j$. Si l'on désigne par x'_i, x'_j et x'_k les images inverses de x_i, x_j et x_k par les trois projections de $S_{ijk} = S_i \times_S S_j \times_S S_k$, on a des S_{ijk}-isomorphismes

(3.3.5.6)



où, par exemple, u'_{ij} est obtenu en transportant par les isomorphismes de transitivité de l'image inverse (D 1.6, 9.6, 9.19) l'image inverse de u_{ij} par la projection $S_{ijk} \to S_{ij}$. La structure de A-gerbe de G fournit un isomorphisme

$$(3.3.5.7) \qquad A(S_{ijk}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{S_{ijk}}(x'_j), \qquad (2.2.7.1),$$

et l'on définit donc une section $c_{ijk} \in A(S_{ijk})$ en imposant

$$(3.3.5.8) \qquad c_{ijk} = u'_{jk} \cdot (u'_{ik})^{-1} \cdot u'_{ij} .$$

3.3.5.9. Ce procédé de définition d'un cocycle est connu depuis fort longtemps en topologie. On prendra garde qu'ici les $S_i \to S$ ne sont pas nécessairement des monomorphismes. L'on ne peut donc pas travailler avec des cochaines normalisées: penser au cas ou $\{S_i \to S\}$ ne comporte qu'un morphisme.

3.4. Comparaison de la cohomologie d'un lien et de celle de son centre.

Théorème 3.4.1. Soient L un lien et C son centre. L'application

(3.4.1.1) $\quad H^2(C)\times H^2(L) \to H^2(L),\ (x,p) \longmapsto xp$,

(où xp est la classe du produit contracté $X \overset{C}{\wedge} P$ de (2.4.4), X et P étant des représentants de x et p) fait opérer le groupe $H^2(C)$ librement et transitivement sur l'ensemble $H^2(L)$. Soient P et Q deux L-gerbes, p et q leurs classes dans $H^2(L)$ et $h \in H^2(C)$ la classe de $HOM_L(P,Q)$ (2.3.6). On a

(3.4.1.2) $\quad hp = q$

(Réf. IV, 3.3.3)

Remarque 3.4.2. D'après (2.4.4), la définition de l'application (3.4.1.1) suppose seulement la donnée d'un morphisme central $u: C \to L$, ce qui n'implique pas que C soit abélien. Si l'on désigne par $c: C \to C_L$ le morphisme naturel, où C_L est le centre de L, on a

(3.4.2.1) $\quad xp = c^{(2)}(x)p,\ x \in H^2(C),\ p \in H^2(L)$,

où xp est la classe de $X \overset{C}{\wedge} P$, X et P étant des représentants de x et p. En effet, le produit contracté est associatif (2.4.4.1).

Proposition 3.4.3. Soit $u: L \to M$ un morphisme de liens induisant sur les centres un morphisme $v: C_L \to C_M$.

(i) Si $p \in H^2(L)$, $q \in H^2(M)$, $x \in H^2(C_L)$ et si $p \overset{u}{\multimap} q$

on a

(3.4.3.1) $\quad xp \xrightarrow{u} yq \quad$ où $\quad y = v^{(2)}(x)$.

(ii) Si, de plus, C_M est le centralisateur de u (3.1.5), on a

(3.4.3.2) $\quad u^{(2)}(xp) = v^{(2)}(x)u^{(2)}(p)$, $x \in H^2(C_L)$, $p \in H^2(L)$.

(Réf. IV, 3.3.4)

Remarque 3.4.3.3. Soient L un lien et C son centre. Le groupe des automorphismes de L opère sur L et C. D'après (3.4.3) les opérations induites par fonctorialité (3.1.5.4) sur $H^2(L)$ et $H^2(C)$ sont compatibles avec l'accouplement (3.4.1.1). D'après (II, 3.7.4), on en déduit, pour tout $x \in H^2(L)$ un cocycle de $\mathrm{Aut}(L)$ à valeurs dans $H^2(C)$ qui a une interprétation intéressante lorsque $L = \underline{\mathrm{lien}}(A)$ (3.6.7). Notons en passant que deux L-gerbes sont équivalentes (mais non pas L-équivalentes) si, et seulement si, leurs classes sont congrues modulo $\mathrm{Aut}(L)$, comme il résulte immédiatement de (2.2.8).

Proposition 3.4.4. Soit $u: L \to M$ un morphisme de liens et soit C_u le centralisateur de u (1.2.10).

(i) Il existe une application

(3.4.4.1) $\quad H^2(L) \times H^2(M) \to H^2(C_u), \quad (p,q) \rightsquigarrow (q \underset{u}{:} p)$,

telle que, si P et Q représentent p et q, la C_u-gerbe $\mathrm{HOM}_u(P,Q)$ (2.3.2) représente $(q \underset{u}{:} p)$.

(ii) Soient C_L le centre de L, $x \in H^2(C)$, $p \in H^2(L)$ et $q \in H^2(M)$. On a

(3.4.4.2) $\qquad (q \underset{u}{;} xp) = x^{-1}(q \underset{u}{;} p)$

(iii) Soient C_M le centre de M, $y \in H^2(C_M)$, $P \in H^2(L)$ et $q \in H^2(M)$. On a

(3.4.4.3) $\qquad (yq \underset{u}{;} p) = y(q \underset{u}{;} p)$

(iv) Si $u: L \to M$ est central et si L est abélien, on a

(3.4.4.4) $\qquad (q \underset{u}{;} p) = p^{-1}q$

Résulte de (2.4.9). Les produits des seconds membres sont définis par les morphismes centraux $C_L \to C_u \leftarrow C_M$ (1.2.12.5). On rappelle que, par définition (3.1.4),

$$(p \overset{u}{\multimap} q) \iff ((q \underset{u}{;} p) \in H^2(C_u)') .$$

Proposition 3.4.5. Soient $u: C \to L$ un morphisme de liens central, $x \in H^2(C)$ et $p \in H^2(L)$. Pour que $x \overset{u}{\multimap} xp$ il faut et il suffit que $p \in H^2(L)'$. Si $x \in H^2(C)'$, on a $xp = p$. Si C est abélien, $x \overset{u}{\multimap} p$ équivaut à $x^{-1}p \in H^2(L)'$.

Résulte de (2.4.6).

Corollaire 3.4.6. Soient L un lien et $c: C_L \to L$ son centre. Pour que la relation $c^{(2)}: H^2(C_L) \multimap H^2(L)$ soit fonctionnelle il faut et il suffit que $\mathrm{card}(H^2(L)') = 1$ ou encore que L soit représentable et que pour tout (resp. un) représentant A de L l'application $H^1(A) \to H^1(\underline{\mathrm{Int}}(A))$ soit surjective. S'il en est ainsi, l'application $c^{(2)}$ est bijective.

Résulte de (3.4.5), (3.2.4), (3.2.5) et (3.4.1).

3.5. Liens réalisables.

Proposition 3.5. Soient L un lien et C son centre. Il

existe une unique classe $\rho_L \in H^3(C)$ telle que, pour toute suite exacte

(*) $$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} I \xrightarrow{v} Q \longrightarrow 0$$

de faisceaux de groupes abéliens, l'ensemble $\{\rho_L\}$ contienne l'image de l'application composée

(**) $$H^2(L \overset{C}{\wedge} I) \xrightarrow{a^{(2)}} H^2(Q) \xrightarrow{d} H^3(C)$$

où d est l'opérateur cobord attaché à (*) et où $a: L \overset{C}{\wedge} I \to Q$ est le morphisme défini par $1+v: L \times I \to Q$ (1.2.14.1).

(Réf. VI, 2.3)

Théorème 3.5.1. Pour qu'un lien L soit réalisable (c'est à dire $H^2(L) \neq \emptyset$) il faut et il suffit que $\rho_L = 0$.

(Réf. VI, 2.3)

Remarque 3.5.2. Soient C un faisceau de groupes abéliens et $\underline{N}$ l'ensemble des classes à isomorphisme près de liens de centre C. D'après (Réf. VI, 2.8), la relation <<il existe des liens réalisables R et R' de centre C tels que $L \overset{C}{\wedge} R$ soit C-isomorphe à $M \overset{C}{\wedge} R'$>> induit une relation d'équivalence R sur $\underline{N}$ et le produit contracté (1.2.14) munit le quotient

(3.5.2.1) $$Ir(C) = \underline{N}/R$$

d'une loi de groupe abélien appelé groupe de MacLane de C, cf . [4].

Proposition 3.5.3. Soit C un faisceau de groupes abéliens. En associant à tout lien L de centre C la classe ρ_L de (3.5) on définit un monomorphisme de groupes

(3.5.3.1) $$\rho: Ir(C) \to H^3(C).$$

(Réf. VI, 2.8)

Proposition 3.5.4. Soit $a: C \to C'$ un monomorphisme de faisceaux de groupes abéliens. En associant à tout lien L de centre C le produit contracté $L \overset{C}{\wedge} C'$, on définit un morphisme de groupes abéliens

$$Ir(a): Ir(C) \to Ir(C')$$

compatible avec les injections (3.5.3.1).

(Réf. VI, 2.4, 2.5) On prendra garde que si a n'est pas un monomorphisme, le centre de $L \overset{C}{\wedge} C'$ est en général différent de C; si C' est nul, $L \overset{C}{\wedge} C'$ n'est autre que $\underline{Int}(L)$. On a cependant un résultat un peu plus général que le précédent.

Proposition 3.5.5. Soit $u: L \to M$ un morphisme de liens induisant sur les centres un morphisme $v: C_L \to C_M$. On a $v^{(3)}(\rho_L) = \rho_M$, où $\rho_L \in H^3(C_L)$ et $\rho_M \in H^3(C_M)$ sont les classes de (3.5.1).

(Réf. VI, 2.4)

Proposition 3.5.6. Soient $f: E' \to E$ un morphisme de sites L un lien sur E, L' son image inverse sur E' (IV, 2.2), C le centre de L, C' celui de L' et $c: f^*(C) \to C'$ le morphisme naturel. La classe $\rho_{L'}$ de L' est l'image de celle de L par l'application composée

$$(3.5.6.1) \qquad H^3(E,C) \xrightarrow{\varphi} H^3(E',f^*(C)) \xrightarrow{c^{(3)}} H^3(E',C') ,$$

où φ est le morphisme induit par $f: E' \to E$.

(Réf. VI, 2.10). On prendra garde que c n'est pas, en général, un isomorphisme.

3.5.7. Surjectivité du H^2. Soit $u: L \to M$ un morphisme de liens tel que le centre de M soit le centralisateur de u (par exemple u est surjectif (1.2.3)). D'après (3.1.5), on a alors une application $u^{(2)}: H^2(L) \to H^2(M)$ dont l'étude est en fait un problème de cohomologie abélienne: il résulte de (3.5.1), (3.5.5), (3.4.1) et (3.4.3.2) que pour vérifier qu'une classe $q \in H^2(M)$ appartient à l'image de $u^{(2)}$ on doit annuler successivement deux classes

$$\rho_L \in \ker(H^3(C_L) \to H^3(C_M)) \quad \text{et} \quad h \in \operatorname{coker}(H^2(C_L) \to H^2(C_M)),$$

où $v: C_L \to C_M$ est le morphisme induit par u sur les centres. Dans un autre contexte, Kamber a montré que, si

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 1$$

est une suite exacte de groupes à opérateurs (disons), le groupe $H^3(Z)$, où Z est le centre de A suffit à exprimer la surjectivité de l'application $H^2(B) \to H^2(C)$. Il n'en n'est pas de même ici, comme le montre l'exemple suivant.

3.5.7.1. On prend pour site le topos des G-ensembles, $G = Z/2Z$, pour A (resp. B) le groupe alterné (resp. symétrique) de trois lettres, d'où $C = Z/2Z$, et l'on fait opérer G trivialement. Puisque G est cyclique d'ordre premier, les H^i abéliens se calculent en regardant le noyau et le conoyau de la multiplication par 2 (CL p.143); donc $H^i(A) = 0$, $i \geq 1$, $H^2(C) = Z/2Z$, et $H^2(B) = H^2(B)' = \{1\}$.

3.6. Compléments sur la suite exacte de cohomologie.

Proposition 3.6.1. Soit $1 \longrightarrow A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \longrightarrow 1$ une suite

exacte de faisceaux de groupes telle que C opère trivialement sur lien(A) (2.3.5.7). On a une "suite" e

$$\ldots\ H^1(B) \xrightarrow{b^{(1)}} H^1(C) \xrightarrow{d} H^2(A) \xrightarrow{a^{(2)}} o\ H^2(B) \xrightarrow{b^{(2)}} H^2(C)\ ,$$

où $b^{(1)}$ est l'application (II, 3.4.2), où $a^{(2)}$ est la correspondance (3.1.4.5), où $b^{(2)}$ est l'application (3.1.5.2) et où d est l'application obtenue en associant à tout C-torseur P la classe de la gerbe K(P) des relèvements de P (2.5.4). De plus

(i) Pour que $x \in H^1(C)$ appartienne à l'image de $b^{(1)}$ il faut et il suffit que $d(x) \in H^2(A)'$.

(ii) Soient Z le centralisateur de $a: A \to B$ et soit $z: Z \to C$ le morphisme induit par $b: B \to C$. Pour que d(x) soit la classe unité il faut et il suffit que x appartienne à l'image de $z^{(1)}: H^1(A) \to H^1(C)$.

(iii) Soit $x \in H^2(A)$; pour que x corresponde à la classe unité de $H^2(B)$ il faut et il suffit qu'il appartienne à l'image de d.

(iv) Soit $x \in H^2(B)$ pour que $b^{(2)}(x)$ soit neutre il faut et il suffit que x corresponde à un $y \in H^2(A)$.

3.6.1.1 (Réf. IV, 4.2.8, 4.2.10 et 4.3.3). On notera que cette proposition s'applique notamment si A est central dans B. Si l'on ne suppose plus que C opère trivialement sur lien(A), l'assertion (i) doit être remplacée par la proposition (2.5.4); les autres assertions se généralisent aussi, comme nous allons voir.

Proposition 3.6.2. Soient $1 \longrightarrow A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \longrightarrow 1$ une suite exacte de faisceaux de groupes, Z le centralisateur de A dans

B et $z: Z \to C$ le morphisme induit par b. Les automorphismes intérieurs de B font opérer C sur Z. Soit P un C-torseur et soit ${}^P z: {}^P Z \to {}^P C$ le morphisme obtenu en tordant z par P. Pour tout C-torseur Q les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) la classe de $Q \overset{C}{\wedge} P^o$ dans $H^1({}^P C)$ appartient à l'image de $H^1({}^P z): H^1({}^P Z) \to H^1({}^P C)$,

(ii) il existe une équivalence de gerbes $f: K(P) \to K(Q)$ telle que l'isomorphisme $f': {}^P\underline{lien}(A) \to {}^Q\underline{lien}(A)$ qui la lie (2.5.4) vérifie ${}^Q\underline{lien}(a).f' = {}^P\underline{lien}(a)$, (2.5.4.2).

3.6.2.1 (Réf. IV, 4.3.3). On notera que ceci est la généralisation de (3.6.1.(ii)). On l'améliore comme suit si A est central.

Proposition 3.6.3. Sous les hypothèses de (3.6.2), si A est central dans B, on a Z = B et le diagramme ci-dessous est commutatif

(3.6.3.1)
$$\begin{array}{ccccc} H^1(B) & \xrightarrow{u^{(1)}} & H^1(C) & \xrightarrow{d} & H^2(A) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \theta_P} \ \approx & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ H^1(B') & \xrightarrow[a'^{(1)}]{} & H^1(C') & \xrightarrow[d']{} & H^2(A) \end{array}$$

où $1 \to A \xrightarrow{a'} B' \xrightarrow{b'} C' \to 1$ est obtenue en tordant $1 \to A \to B \to C \to 1$ par le C-torseur P, où θ_P est la bijection de (II, 4.2.5.2) et où $r(x) = x - d(p)$, $p \in H^1(C)$ étant la classe de p.

(Réf. IV, 4.3.4). Enfin, on notera que les propositions suivantes généralisent les assertions (iii) et (iv) de (3.6.1).

Proposition 3.6.4. Soit $m: F \to G$ un morphisme de gerbes lié

par un épimorphisme de liens $v: M \to N$. Soient s une section de G, et $K(x)$ la gerbe des relèvements de s (2.5.2). Le morphisme $u(s): L(s) \to M$ qui lie $k(s): K(s) \to F$ est injectif et normal et v est son conoyau.

(Réf. IV, 2.5.5)

Proposition 3.6.5. Soient $K \xrightarrow{k} F \xrightarrow{m} G$ des morphismes de gerbes liés par des morphismes $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$ tels que u soit injectif et normal et tels que v soit le conoyau de u. Il existe une section s de G, unique à isomorphisme près, telle que le composé $mk: K \to G$ se factorise par s. De plus, K est équivalente à la gerbe des relèvements de s relativement à $m: F \to G$.

(Réf. 2.5.5.5)

Proposition 3.6.7. Soient A un faisceau de groupes, C son centre et D le composé des opérateurs cobords

$$H^0(\underline{Out}(A)) \to H^1(\underline{Int}(A)) \to H^2(C) \tag{3.6.7.1}$$

attachés par (II, 5.1.3) et (III, 3.6.1) aux quotients

$$\underline{Int}(A) = A/C \quad \text{et} \quad \underline{Out}(A) = \underline{Aut}(A)/\underline{Int}(A). \tag{3.6.7.2}$$

Pour tout $a \in H^0(\underline{Out}(A))$, on a

$$D(a^{-1}).1 = a^{(2)}(1) \quad (\text{dans } H^2(A)) \tag{3.6.7.3}$$

où 1 désigne la classe unité de $H^2(A)$. De plus, on a

$$D(ab) = D(b).b^{-1}(D(a)), \tag{3.6.7.4}$$

où l'on a posé

$$a(x) = \alpha^{(2)}(x), \quad a \in H^0(\underline{Out}(A)), \ x \in H^2(C), \tag{3.6.7.5}$$

α étant l'automorphisme de C induit par a.

3.6.7.6 (Réf. IV, 5.2.7). On notera que, d'après (3.6.7.3), $D(a^{-1})$ est le cocycle annoncé dans (3.4.3.3), d'où (3.6.7.4).

3.7. Sections d'un espace homogène.

Proposition 3.7.1. Soient A un faisceau de groupes et X un espace homogène à droite sous A (II, 2.1). La E-catégorie T(X) dont les objets de projection $S \in Ob(E)$ sont les (P,p), où P est un A-torseur sur S et $p: P \to X$ un A-morphisme, est une gerbe. Le morphisme de liens

(3.7.1.1) $\quad s(X): S(X) \to \underline{lien}(A)$

qui lie le foncteur $T(X) \to TORS(E,A)$, $(P,p) \rightsquigarrow P$, est injectif.

3.7.1.1 (Réf. IV, 5.1.1). On dira que S(X) est le lien des stabilisateurs de X. Bien entendu, si X admet une section s, celle-ci détermine un morphisme $A_d \xrightarrow{\sigma} X$, $a \rightsquigarrow sa$, autrement dit une section (A_d,σ) de la gerbe T(X), dont le faisceau d'automorphisme est le stabilisateur de s.

Proposition 3.7.2. Sous les hypothèses de (3.7.1).

(i) Pour que la classe $c(X) \in H^2(S(X))$ de T(X) soit neutre il faut et il suffit qu'il existe un A-torseur P et un A-morphisme $p: P \to X$.

(ii) Soient P un A-torseur, $p: P \to X$ un A-morphisme et S le faisceau des A-sutomorphismes i de P tels que $pi = p$. Le morphisme d'inclusion $s: S \to \underline{ad}(P)$ représente le morphisme $s(X): S(X) \to \underline{lien}(A)$, (2.2.5), (3.2.4.2), et l'on a un A-isomorphisme $S\backslash P \xrightarrow{\sim} X$.

(iii) Sous les conditions de (ii), pour que X admette une section, il faut et il suffit que le $\underline{ad}(P)$-torseur à gauche X provienne par extension du groupe structural d'un S-torseur à gauche.

(Réf. IV, 5.1.4)

Chapitre IV. Changement de site.

1. Image inverse de torseurs.

1.1. Soit $f: \underline{X} \to \underline{Y}$ un morphisme de $\underline{U}$-sites (I, 1.4). Le foncteur image inverse $f^*: \widetilde{\underline{Y}} \to \widetilde{\underline{X}}$ commute aux limites projectives finies; il permet donc de transporter les structures de groupes, d'objets à opérateurs, etc... éventuellement données sur un objet de $\underline{Y}$. De plus, il commute aux limites inductives. Il transforme donc un torseur (resp. espace homogène) (II, 2.1) en un torseur (resp. espace homogène) et aussi une suite exacte de groupes de $\underline{Y}$ en une suite exacte de groupes de $\underline{X}$. D'où l'on déduit

Proposition 1.2. Pour tout faisceau de groupes A sur $\underline{Y}$, on a des morphismes, fonctoriels en A,

$$H^i(f,A): H^i(\underline{Y},A) \to H^i(\underline{X},f(A)), \quad i = 0,1 , \tag{1.2.1}$$

qui sont compatibles avec les opérateurs cobords de (II, 5.1.3). Si A est abélien, ces morphismes s'identifient par les isomorphismes (II, 3.5.5) avec les morphismes de groupes définis en algèbre homologique.

(Réf. V, 1.5.1, 1.5.3)

Proposition 1.3. Soient $a: A \to B$ un morphisme de faisceaux de groupes, P un A-torseur et Q un B-torseur. Le morphisme naturel $f^*(\underline{\mathrm{Hom}}_a(P,Q)) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{f^*(a)}(f^*(P),f^*(Q))$ est un isomorphisme.

Ce fait, particulier aux torseurs, résulte immédiatement de la formule

$$\mathrm{Hom}_a(P,Q) \approx Q \overset{A}{\wedge} P^o$$

2. Image inverse de liens.

2.1. Soit $f: \underline{X} \to \underline{Y}$ un morphisme de $\underline{U}$-sites. Pour tout objet Y de $\underline{Y}$, l'image inverse d'un faisceau de groupes sur Y est un faisceau de groupes sur $X = f^{-1}(Y)$, où $f^{-1}: \underline{Y} \to \underline{X}$ est le foncteur sous-jacent à f (I, 1.4). Par compatibilité avec la localisation (SGAA III, §3.6), on a donc un morphisme de champs sur $\underline{Y}$

$$(2.1.1) \qquad \Phi: \mathrm{FAGR}(\underline{Y}) \to f_*(\mathrm{FAGR}(\underline{X})) ,$$

où $f_*(\mathrm{FAGR}(\underline{X}) = \mathrm{FAGR}(\underline{X})\times_{\underline{X}}\underline{Y}$ est l'image directe par f (I, 5.1,2) du champ des faisceaux de groupes sur $\underline{X}$. Il est immédiat que Φ transforme automorphisme intérieur en automorphisme intérieur. D'après la "propriété universelle du champ des liens" (II, 1.1.1), il existe donc un couple (Φ',φ), unique à isomorphisme unique près

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{FAGR}(\underline{Y}) & \xrightarrow{\Phi} & f_*(\mathrm{FAGR}(\underline{X})) \\ \downarrow{\scriptstyle \underline{\mathrm{lien}}(\underline{Y})} & \overset{\varphi}{\approx} & \downarrow{\scriptstyle f_*(\underline{\mathrm{lien}}(\underline{X}))} \\ \underline{\mathrm{LIEN}}(\underline{Y}) & \xrightarrow[\Phi']{} & f_*(\underline{\mathrm{LIEN}}(\underline{X})) \end{array}$$

où $f_*(\underline{\mathrm{lien}}(\underline{X}))$ est obtenu par le changement de base $f^{-1}: \underline{Y} \to \underline{X}$ à partir du morphisme $\underline{\mathrm{lien}}(\underline{X})$ (I, 1.1.1). Par passage aux catégories de sections, on trouve donc un foncteur

$$(2.1.3) \qquad f^*_{li}: \underline{\mathrm{Lien}}(\underline{Y}) \to \underline{\mathrm{Lien}}(\underline{X}), \quad \text{(aussi noté } f^*\text{)}.$$

Définition 2.2. Soient $f: \underline{X} \to \underline{Y}$ un morphisme de sites. On appelle image inverse par f d'un lien L sur $\underline{Y}$ le lien

$f^*_{li}(L)$ sur $\underline{X}$.

2.2.1. En résumé, on a défini l'image inverse d'un lien par la condition d'être compatible avec la localisation et par la donnée, pour tout faisceau de groupes A sur $\underline{Y}$, d'un isomorphisme fonctoriel et compatible avec la localisation

(2.2.2) $\qquad \varphi(A)\colon f^*_{li}(\underline{lien}(A)) \xrightarrow{\sim} \underline{lien}(f^*(A))$.

Proposition 2.3. Si un morphisme de liens sur $\underline{Y}$ est injectif, surjectif, central ou normal (III, 1.2.3), il en est de même de son image inverse. Le foncteur image inverse de liens commute à la formation des produits finis (III, 1.2.8), du conoyau d'un morphisme (III, 1.2.5) et du produit contracté (III, 1.2.14).

(Réf. V, 1.2.5, 1.2.6)

2.3.1. Il en résulte que si L est un lien sur $\underline{Y}$, on a un morphisme canonique faisceaux de groupes abéliens sur $\underline{X}$

(2.3.2) $\qquad \gamma\colon f^*(C) \to C'$,

où C est le centre de L (III, 1.2.7) et C' celui de l'image inverse de L par $f\colon \underline{X} \to \underline{Y}$. Mais, en général, γ n'est pas un isomorphisme.

Proposition 2.4. Soient $f\colon \underline{X} \to \underline{Y}$ un morphisme de sites, L un lien sur $\underline{Y}$ et G une L-gerbe. L'image inverse de G par f (I, 5.2.2) est une gerbe sur $\underline{X}$, liée par l'image inverse de L. Si $u\colon L \to M$ est un morphisme de liens sur $\underline{Y}$ et $m\colon G \to H$ un u-morphisme de gerbes, l'image inverse de m est liée par l'image inverse de u. L'image inverse de la gerbe des A-torseurs, où A est un faisceau de groupes sur $\underline{Y}$, est la gerbe des

$f^*(A)$-torseurs.

2.4.1 (Réf. V, 1.4.2). On a donc, pour tout lien L sur $\underline{Y}$, une application

$$H^2(f,L): H^2(\underline{Y},L) \to H^2(\underline{X},f^*(L)), \tag{2.4.2}$$

qui est compatible avec les correspondances de (III, 3.1.4). De plus, $H^2(f,L)$ respecte les ensembles de classes neutres car, pour toute gerbe G sur $\underline{Y}$, on a un foncteur

$$\underline{Lim}(G/\underline{Y}) \to \underline{Lim}(f^*(G)/\underline{X}), \quad \text{(I, 5.2.3)}. \tag{2.4.3}$$

Proposition 2.5. Pour tout faisceau de groupes abéliens A sur $\underline{Y}$, l'application $H^2(f,A)$ s'identifie par les isomorphismes (III, 3.3.3) avec le morphisme de groupes défini en algèbre homologique (SGAA, V, 5).

Par un théorème général d'algèbre homologique, cela résulte de (1.2) et du fait que la formation de l'image inverse de champs commute à celle des produits finis (I, 5.3) et à celle de la gerbe des relèvements d'une section (III, 2.5.2) (Réf. V, 1.4.3).

Proposition 2.6. Soient L un lien sur $\underline{Y}$ et C son centre. L'application $H^2(\underline{Y},L) \to H^2(\underline{X},f^*(L))$ est compatible avec les opérations du groupe $H^2(\underline{Y},C)$ définies par (III, 3.4.1).

(Réf. V, 1.5.2). On fait évidemment opérer $H^2(\underline{Y},C)$ sur $H^2(\underline{X},f^*(L))$ grâce au morphisme de groupes induit par (2.3.2)

$$H^2(\underline{Y},C) \to H^2(\underline{X},f^*(C)) \to H^2(\underline{X},C')$$

où C' est le centre de $f^*(L)$.

3. Suite exacte attachée à une application continue.

Définition 3.1. Soient $f: \underline{X} \to \underline{Y}$ un morphisme de sites et A un faisceau de groupes sur $\underline{X}$. On désigne par $R^1f_*(A)$ le faisceau associé (sur $\underline{Y}$) au préfaisceau d'ensembles pointés

$$(3.1.1) \qquad Y \longmapsto H^1(f^{-1}(Y),A), \quad Y \in Ob(\underline{Y}),$$

où $f^{-1}: \underline{Y} \to \underline{X}$ est le foncteur sous-jacent à f.

3.1.2. Bien entendu, $R^1f_*(A)$ est fonctoriel en A et s'identifie, lorsque A est abélien, au faisceau de groupes défini en algèbre homologique. Nous laissons au lecteur le soin de transcrire les suites exactes de (II, 5).

Proposition 3.2. Soient $f: \underline{X} \to \underline{Y}$ un morphisme de $\underline{U}$-sites et A un faisceau de groupes sur $\underline{X}$. On a une suite exacte d'ensembles pointés

$$(3.2.1) \qquad 1 \longrightarrow H^1(\underline{Y},f_*(A)) \xrightarrow{\varphi} H^1(\underline{X},A) \xrightarrow{\gamma} H^0(\underline{Y},R^1f_*(A))$$

où γ est le composé

$$H^1(\underline{Y},f_*(A)) \longrightarrow H^1(\underline{X},f^*f_*(A)) \xrightarrow{r^{(1)}} H^1(\underline{X},A),$$

$r: f^*f_*(A) \to A$ étant le morphisme d'adjonction.

3.2.2 (Réf. V, 3.1.3). Bien entendu, γ est l'application induite sur les sections par le morphisme structural du faisceau associé à (3.1.1). On a d'ailleurs un énoncé plus précis.

Proposition 3.3. Le foncteur image directe induit une équivalence $\underline{Tors}(\underline{X},A)^{\underline{Y}} \xrightarrow{\approx} \underline{Tors}(\underline{Y},f_*(A))$, $P \longmapsto f_*(P)$, où la première est la sous-catégorie pleine de $\underline{Tors}(\underline{X},A)$ dont les objets sont les A-torseurs sur $\underline{X}$ trivialisés par l'image inverse (image par

f^{-1}) d'une famille couvrant l'objet final de $\underline{Y}$. La classe p d'un tel A-torseur P est l'image de celle de $f_*(P)$ par l'application φ de (3.2.1).

(Réf. V, 3.1.1)

Proposition 3.4. Soit P un A-torseur. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\underline{Y}, f_*(A)) & \xrightarrow{\varphi} & H^1(\underline{X}, A) & \xrightarrow{\gamma} & H^0(\underline{Y}, R^1f_*(A)) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \theta_P} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_P} \\ H^1(\underline{Y}, f_*(\underline{ad}(P)) & \longrightarrow & H^1(\underline{X}, \underline{ad}(P)) & \longrightarrow & H^0(\underline{Y}, R^1f_*(\underline{ad}(P)) \end{array} \tag{3.4.1}$$

où θ_P est la bijection de (II, 4.2.5.2) et où ρ_P est induit par l'isomorphisme de faisceaux d'ensembles

$$R^1f_*(A) \xrightarrow{\sim} R^1f_*(\underline{ad}(P)) \tag{3.4.2}$$

déduit de θ_P par localisation et passage au faisceau associé.

(Réf. V, 3.1.4)

Proposition 3.5. Soient $c \in H^0(\underline{Y}, R^1f_*(A))$ et $T(c)$ la $\underline{Y}$-catégorie dont la fibre en $Y \in Ob(\underline{Y})$ est la catégorie des A-torseurs sur $f^{-1}(Y)$ dont la classe $p \in H^1(f^{-1}(Y), A)$ a pour image dans $R^1f_*(A)(Y)$ la restriction de c.

(i) $T(c)$ est une $\underline{Y}$-gerbe; pour qu'elle soit triviale il faut et il suffit que c appartienne à l'image de γ (3.2.1).

(ii) Si c est l'image par γ de la classe p d'un A-torseur P sur $\underline{X}$, on a une équivalence de gerbes sur $\underline{Y}$

$$T(c) \to \mathrm{TORS}(\underline{Y}, f_*(\underline{ad}(P))), \quad Q \rightsquigarrow f_*(Q \overset{A}{\wedge} P^o). \tag{3.5.1}$$

(iii) Si A est abélien, $T(c)$ est une $f_*(A)$-gerbe dont

la classe est l'image de c par le morphisme

(3.5.2) $$H^0(\underline{Y}, R^1f_*(A)) \to H^2(\underline{Y}, f_*(A))$$

attaché à la suite spectrale de LERAY de f (SGAA, V, 5).

3.5.3 (Réf. V, 3.1.6, 3.2.1). Pour que (111) ait un sens, il faut se donner une structure de $f_*(A)$-gerbe sur $T(c)$, c'est à dire, d'après (III, 2.2.7), une famille d'isomorphismes $f_*(A)(Y) \xrightarrow{\sim} Aut_Y(P)$, $P \in Ob(T(c)_Y)$, $Y \in Ob(Y)$, qui par définition des deux membres, s'écrivent également U: $A(X)$ $Aut_X(P), X = f^{-1}(Y)$, $p \in Ob(T(c)_Y)$. On prend $U(a)(p)=pa$

Remarque 3.5.4. Pour utiliser la proposition précédente il est nécessaire d'avoir des renseignements sur le lien L(c) de T(c). C'est "presque" l'image directe de lien (A). Plus précisément, d'après (ii), il existe une famille (Y_i) couvrant l'objet final de $\underline{Y}$, et, pour tout i, des A-torseurs P_i sur $f^{-1}(Y_i)$ et des isomorphismes de Liens aux Y_i: $lien(f_*(ad(P_i))) \cong L(c)$. Plus intrinsèquement, notons que T(c)est, par définition, une sous-gerbe maximale (III, 2.1.7.1) de $f_*(TORS(X,A)) = TORS(\underline{X},A)_{\underline{X}}\underline{Y}$ (I, 5.1.1) et que, par définition de l'image inverse d'un champ (I, 5.2.2.2), on a donc un morphisme de gerbes sur $\underline{X}$: $f^*(T(c)) \to TORS(\underline{X},A)$, d'où un morphisme de liens sur $\underline{X}$, ρ: $f^*(L(c)) \to \underline{lieu}(A)$. Si (Y_i) est comme plus haut, on vérifie que p est représenté sur $f^{-1}(Y_i)$ par le morphisme naturel $f^* f_*(\underline{ad}(P_i)) \to \underline{ad}(P_i)$.

Proposition 3.5.5. Soient A un faisceau de groupes sur $\underline{X}$, C son centre. Supposons que le morphisme naturel

$$H^2(\underline{X},C) \to H^0(\underline{Y},R^2f_*(C))$$

soit nul et que l'image du morphisme $R^1f_*(C) \to R^1f_*(A)$ soit la section unité. Alors, pour toute L-gerbe G sur $\underline{X}$, où L = lien(A) il existe une gerbe H sur $\underline{Y}$ et un morphisme de gerbes sur X, $f^*(H) \to G$. Enfin, le lien de H est localement isomorphe à $\underline{lien}(f_*(A))$.

(Réf. V, 3.1.11). On notera que G est triviale si H l'est. Plus précisement, on prouve (Réf. V, 3.1.9.5) que le foncteur composé

(3.5.5.1) $$\underline{Lim}(H/\underline{Y}) \to \underline{Lim}(f^*(H)/\underline{X}) \to \underline{Lim}(G/\underline{X})$$

est pleinement fidèle.

BIBLIOGRAPHIE

1. ARTIN (Michael) et GROTHENDIECK (Alexander), Séminaire de Géométrie algébrique de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1963-64 (cité SGAA).
2. CARTAN (Henri) et EILENBERG (Samuel), Homological Algebra, Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton Mathematical Series, 19), (cite M).
3. DEDECKER (Paul), C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, p. 4137-4139 (12 Avril 1965), Canad. J. Math., 1960, p. 231-251, 1963, p. 84-93.
4. EILENBERG (Samuel) et MACLANE (Saunders), Ann. Math., 48, 1947, p. 326-341.
5. FRENKEL (Jean), Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Bull. Soc. Math., France, 85, 1957, p. 135-220.
6. GABRIEL (Paul), Homotopie, Séminaire Mathématique de l'Université de Strasbourg, 1964.
7. GIRAUD (Jean), C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, p. 2392-2394 et p. 2666-2668.
8. _____, Méthode de la descente, Bull. Soc. Math. France, Supplément, Dec. 1964 (cité D).
9. _____, Analysis situs, Séminaire Bourbaki, 1962-63, exp. 256 (cité AS).
10. GODEMENT (Roger), Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1952) (cité TF).
11. GROTHENDIECK (Alexander), A general theory of fibre spaces with structure sheaf, Univ. of Kansas, Report n° 4, 1955 (cité K).
12. _____, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. J., 9, 1957, p. 119-221 (cité T).
13. _____, Séminaire de géométrie algébrique de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1960 et 1961 (cité SGA VI pour exposé VI).
14. SERRE (Jean-Pierre), Cohomologie galoisienne, Lecture Notes in Math., 5 (1964), Springer (cité CG).

15. _____, Corps Locaux, Paris, Hermann, 1962 (Act. Scient. et ind., 1296).
16. SPRINGER (T. A.), Non abelian H^2 in galois cohomology, to appear.
17. STEINBERG (R.), Regular elements of semi-simple groups, Publ. Math. de l'I.H.E.S., 25.
18. VERDIER (Jean-Louis), Sites et Faisceaux, Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I.H.E.S., 1963-64 (cité SGAA).
19. GROTHENDIECK (Alexander), Le groupe de Brauer, Séminaire Bourbaki, exposés 290, 297....

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

" Multiplication complexe des variétés abéliennes."

Vu et approuvé :

Paris, le 30 NOVEMBRE2 *19* 66

Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc. ZAMANSKY

Vu
et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie
de Paris,
Jean ROCHE

S 1785. — Paris, Imp. Administrative Centrale, 8, rue de Furstenberg (6-61) 1 463